

Algoritmo genético para resolução do problema de p -medianas capacitado associado à distribuição de peças automotivas

Cassiano Augusto Isler¹, Antonio Carlos Bonassa² e Cláudio Barbieri da Cunha³

Resumo: Este artigo descreve um método de solução para um problema real de entrega de peças de um centro de distribuição de uma montadora de automóveis às suas concessionárias ou oficinas cadastradas, que pode ser modelado como um problema de p -medianas capacitado. O objetivo é determinar o número de caminhões a ser utilizado na operação de entrega de peças segundo a demanda conhecida dos clientes. O tamanho do conjunto de clientes atendidos (*clusters*) por cada caminhão é limitado pela sua capacidade pré-estabelecida, caracterizando um problema do tipo de p -medianas capacitado. A solução se baseia na aplicação da meta-heurística Algoritmo Genético para a formação de clusters de atendimento. Dois algoritmos de busca local foram aplicados para aperfeiçoamento das soluções encontradas pelo algoritmo principal. O método foi avaliado em relação às instâncias de problemas disponíveis na literatura e também aplicado ao problema real de distribuição de peças de automóveis. DOI:10.4237/transportes.v20i2.478.

Palavras-chave: p -mediana, capacitado, algoritmo genético, peças automotivas.

Abstract: In this paper we describe a method to solve a real world problem of delivering parts from the distribution center of an auto-maker to its dealerships, which can be modeled as a capacitated p -median problem. The objective is to determine the number of trucks being used in the operation of delivering parts according to known customers demand. The size of the set of clients served (clusters) by each truck is limited by its capacity pre-established, featuring a capacitated p -median problem. The solution is based on the application of meta-heuristic Genetic Algorithm for the clustering of attendance. Two local search algorithms were applied to improve the solutions found by the principal algorithm. The method was evaluated in relation to instances of problems available in literature and applied to the real problem of distribution of auto-parts parts as well.

Keywords: p -medians, capacitated, genetic algorithm, automotive parts.

1. INTRODUÇÃO

Este artigo trata de um problema real de distribuição de peças de reposição produzidas por uma montadora de veículos às suas concessionárias. Diariamente os pedidos realizados pelas concessionárias são faturados e o material armazenado em um único centro de distribuição (CD), de onde partem as viagens de entrega, é disponibilizado para carregamento e transporte. As cargas são agrupadas em função da proximidade do CD aos locais de destino e da capacidade do caminhão de entrega, caracterizando uma típica operação de distribuição de carga fracionada. A empresa transportadora trabalha com um único tipo de caminhão, disponibilizando-os de acordo com a necessidade de carga a ser transportada.

A descrição acima caracteriza um problema do tipo p -mediana capacitado, em que o número de agrupamentos (medianas) é representado pela quantidade de caminhões utilizados na operação de entrega de carga fracionada e a capacidade da mediana está associada à capacidade do veículo.

Propõe-se, para a sua resolução, uma estratégia de solu-

ção baseada na meta-heurística do Algoritmo Genético (AG) que identifique os grupos de clientes a serem atendidos por um mesmo caminhão de modo a minimizar o custo de transporte segundo restrições específicas. A fim de validar o algoritmo proposto para este problema real, são também apresentados resultados de experimentos computacionais considerando instâncias de teste da literatura.

Este artigo está organizado da seguinte forma: na próxima seção, é apresentada uma revisão da literatura, seguindo-se, na seção 3, a estratégia de solução proposta, e os resultados dos experimentos para sua validação na seção 4. A aplicação prática ao problema de distribuição de peças de reposição é descrita na seção 5 e, por fim, na seção 6, são apresentadas as considerações finais.

2. REVISÃO DA LITERATURA

2.1. O problema de p -medianas

Os problemas relacionados à consolidação das cargas fracionadas a serem entregues a diversos clientes geograficamente dispersos podem ser formulados como um problema de p -medianas capacitado (Koskosidis e Powell, 1992). França *et al.* (1999) apresentam uma solução para os problemas de localização de unidades de produção ou distribuição, do transporte tipo *Dial-a-Ride*, de formação de distritos políticos e formação de regiões comerciais para grupos de vendedores. Já Conceição Neto *et al.* (2008) utilizaram a formação de agrupamentos para a determinação de regiões de transportes (regiões logísticas homogêneas) a serem atendidas a partir de um ponto comum. Ming e Cheng (2007) argumentam que a divisão dos indivíduos de uma população em subgrupos (*clusters*) resulta em conjuntos contendo in-

¹ Cassiano Augusto Isler, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Transportes, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil. (e-mail: cassiano.isler@usp.br).

² Antonio Carlos Bonassa, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Transportes, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil. (e-mail: antonio_bonassa@yahoo.com).

³ Cláudio Barbieri da Cunha, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Transportes, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil. (e-mail: cbcunha@usp.br).

Manuscrito recebido em 28/8/2011 e aprovado para publicação em 15/5/2012. Este artigo é parte de TRANSPORTES v. 20, n. 2, 2012. ISSN: 2237-1346 (online). DOI:10.4237/transportes.v20i2.478.

divíduos com o maior nível de similaridade entre si do que com qualquer indivíduo dos conjuntos remanescentes. Flezar e Hindi (2008) apresentam definição similar quando propõem que a solução de um problema de p -medianas deve conter um determinado número de *clusters* de modo que a dissimilaridade em relação a uma determinada característica seja minimizada.

O problema de p -medianas não capacitado (PPMNC) tem por objetivo identificar p instalações (medianas) em um conjunto de n pontos de demanda ($n > p$) e realizar a alocação dos pontos remanescentes ($n - p$) às medianas, de modo que a soma dos custos (distância, tempo etc.) entre essas medianas e os pontos de demanda seja mínimo. O problema de p -medianas capacitado (PPMC) é uma particularização do PPMNC, com restrições adicionais de que cada ponto de demanda seja alocado sem violar a restrição de capacidade de atendimento da mediana.

Sob a terminologia da Teoria dos Grafos, Correa *et al.* (2004) associam o PPMC a um grafo não direcionado $G = (V, A)$ cujo conjunto de vértices V contém os n pontos de demanda interligados pelos arcos do conjunto A . O objetivo do problema é identificar um conjunto de vértices Vp ($Vp \in V$) selecionados como medianas, de modo que a soma dos custos entre os vértices de $\{V-Vp\}$ e os vértices correspondentes (ou associados) de $\{Vp\}$ seja mínima, respeitando-se os limites de capacidade das medianas. Assim, Lorena e Senne (2003) descrevem o problema clássico de p -medianas capacitado (PPMC) como um problema de programação linear inteira (PPLI) conforme as Equações (1) a (6).

$$\text{Minimizar } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \cdot w_{ij} \quad (1)$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n w_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n z_j = p \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n q_i \cdot w_{ij} \leq C_j \cdot z_j \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

$$w_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

$$z_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

em que n = número total de vértices (pontos de demanda) do grafo G ; p = número pontos de demanda a serem escolhidos como medianas; d_{ij} = custo de transporte entre o vértice i e o vértice j ; q_i = demanda do vértice i ; C_j = capacidade do vértice (mediana) j ; $z_j = 1$, se o vértice j é mediana, e 0 caso contrário; $w_{ij} = 1$, se o vértice i é atribuído à mediana j e 0, caso contrário.

O objetivo do problema é minimizar a soma dos custos entre os vértices de $\{V-Vp\}$ alocados às medianas de $\{Vp\}$. As restrições representadas na Equação (2) garantem que cada ponto de demanda de $\{V-Vp\}$ seja alocado a apenas uma mediana; a restrição da Equação (3) garante que o conjunto $\{Vp\}$ contenha exatamente p elementos; as restrições

da Equação (4) asseguram que os limites de capacidade das medianas sejam respeitados; e as restrições apresentadas nas Equações (5) e (6) definem as variáveis de decisão w_{ij} e z_j como binárias.

Nesse contexto, o problema real de distribuição de peças de reposição produzidas por uma montadora de veículos às suas concessionárias, objeto deste artigo, pode ser modelado como um problema de p -medianas capacitado (PPMC), dado um número fixo de medianas (p) – definido *a priori* – que devem ser escolhidas em um conjunto de pontos de demanda $\{V\}$, de modo que os pontos contidos em $\{V-Vp\}$ sejam alocados às medianas de $\{Vp\}$ respeitando-se os seus limites de capacidade. O elevado número de combinações possíveis, tanto para a seleção das medianas como para a atribuição dos pontos de demanda a elas, insere esse problema na categoria NP-Difícil, o que justifica a ampla literatura disponível a respeito da aplicação de heurísticas e meta-heurísticas para a sua resolução, conforme explicitado na seção a seguir.

2.2. Soluções para o Problema de p-medianas

França *et al.* (1999) associam heurísticas e meta-heurísticas a métodos de busca de solução ótima superpostos à métodos de busca de soluções locais. Esses algoritmos procedem à deterioração de uma solução ótima local para que o algoritmo continue sua busca e identifique o ótimo global.

Reese (2006) apresenta uma revisão bibliográfica sobre o problema de p -medianas (não capacitado e capacitado) com um breve histórico dos primeiros modelos relacionados a essa classe de problemas de localização/alocação. O autor apresenta diversas abordagens para a resolução das variantes do problema de p -medianas, com o emprego de heurísticas e meta-heurísticas como Busca Dispersa (*Scatter Search*), Algoritmo Genético (*Genetic Algorithm*), Têmpera Simulada (*Simulated Annealing*), Busca em Vizinhança Variável (*Variable Neighborhood Search*), etc.

Uma ferramenta computacional interativa é apresentada por Pirkul *et al.* (1999) para a resolução do problema de p -medianas capacitado, com o objetivo principal de permitir que o usuário perceba variações relevantes durante a escolha das medianas e da alocação dos pontos de demanda. Os autores propõem uma heurística que apresenta uma solução inicial cuja qualidade pode ser melhorada através de uma interface apresentada ao usuário.

Uma heurística baseada em relaxação Lagrangeana considerando uma formulação de programação binária inteira – sob a denominação de *Lagrangean/Surrogate Approach* – é proposta por Lorena e Senne (2003) para resolução do PPMC. Essa heurística é combinada com outros algoritmos de melhoria das soluções obtidas pela relaxação através da troca entre medianas e vértices e da realocação dos pontos de demanda. Os mesmos autores apresentam – em outro trabalho (Lorena e Senne, 2004) – uma aplicação do PPMC com abordagem de geração de colunas, utilizada na resolução de problemas de programação linear de grande porte, em instâncias reais da cidade de São José dos Campos, no interior do Estado de São Paulo.

Maniezzo *et al.* (1998) utilizam uma meta-heurística de resolução de problemas combinatórios de otimização – denominada Algoritmo Bionômico (*Bionomic Algorithm*) – associada à relaxação Lagrangeana para resolução do PPMC. Segundo os autores, os Algoritmos Bionômicos

compartilham semelhanças com os Algoritmos Genéticos e associam-se à meta-heurística Busca Dispersa ao permitirem a existência de um conjunto de soluções viáveis variável e o uso de múltiplos indivíduos na atualização das gerações, além de direcionarem a escolha dos indivíduos a serem combinados através de uma regra explícita.

Lorena e Furtado (2001) propõem uma meta-heurística alternativa ao Algoritmo Genético (AG) denominada “Algoritmo Genético Construtivo” (AGC), que considera uma população dinâmica aumentada ou diminuída segundo um “parâmetro evolutivo”, após a aplicação dos operadores de recombinação e da avaliação de duas funções que caracterizam a aptidão dos indivíduos. No artigo, o desempenho do AGC é comparado com o desempenho de duas heurísticas (Relaxação Lagrangeana e Têmpera Simulada) e, segundo os autores, o método proposto apresenta resultados com qualidade comparáveis à essas heurísticas e em reduzido tempo computacional.

Correa *et al.* (2004) caracterizam o PPMNC e o PPMC e apresentam um Algoritmo Genético para resolução do problema capacitado associado a um operador de “hipermutação”, além dos operadores convencionais do AG. Uma aplicação do método – com e sem a hipermutação – em instâncias reais é comparada com os resultados de um algoritmo de Busca Tabu (*Tabu Search - TS*), indicando que o novo operador traz benefícios consideráveis aos resultados.

Outros trabalhos contribuíram significativamente para melhoria das técnicas de resolução do PPMNC e PPMC: Pankratz (2005) utiliza uma variação de Algoritmo Genético para a formação de agrupamentos na resolução de um problema de coleta e entrega com janela de tempo para o atendimento de cargas fracionadas de uma transportadora; Mulvey e Beck (1984) e Osman e Christofides (1994) propuseram a utilização combinada das meta-heurísticas Têmpera Simulada e Busca Tabu”; Diaz e Fernández (2004) combinaram as meta-heurísticas Busca Dispersa e Caminho de Reconexão” (*Path Relinking*); Scheuerer e Wendolsky (2006) também aplicaram Busca Dispersa em sua proposição para a solução do problema. Trabalhos mais recentes incluem Fleszar e Hindi (2008) com a aplicação de Busca em Vizinhança Variável” e Chaves *et al.* (2007) com a aplicação de Procura em Agrupamento (*Clustering Search*).

3. ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO PARA O PPMC BASEADA EM ALGORITMO GENÉTICO

A meta-heurística Algoritmo Genético, inicialmente propos-

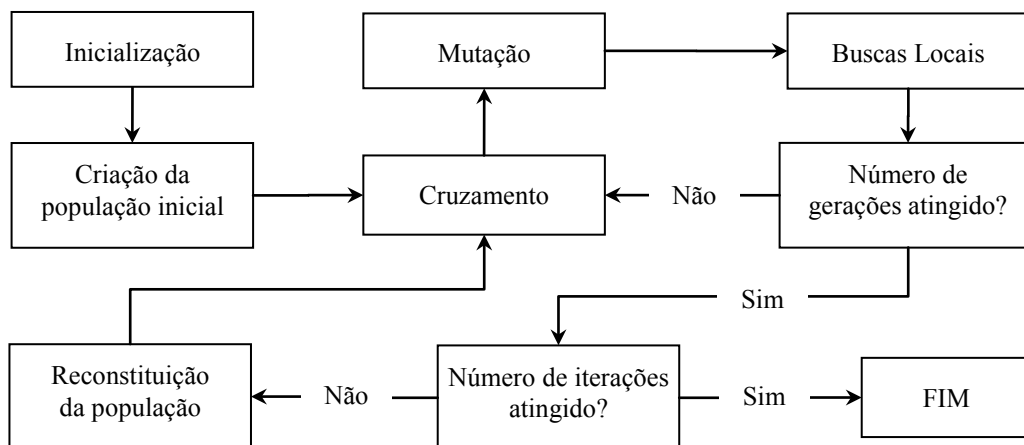


Figura 1. Fluxograma do Algoritmo Genético para resolução do PPMC

ta por Holland (1992), associa-se aos mecanismos de evolução e representação gênica de indivíduos para a resolução de problemas combinatórios de otimização. Os genes são as unidades básicas dos cromossomos e estabelecem as características dos indivíduos. No contexto dos Algoritmos Genéticos, “Aptidão” é um atributo utilizado na literatura para qualificar os indivíduos e definir a sua permanência ou exclusão da população entre gerações sucessivas (Correa *et al.*, 2004). Em geral, esse termo está associado à expressão matemática da função objetivo do modelo que representa o problema.

Um Algoritmo Genético, em geral, envolve as seguintes etapas: avaliação da Aptidão dos indivíduos de uma geração; seleção dos melhores indivíduos; criação de uma nova população através dos operadores de cruzamento e mutação; e atualização da população. O processo de reprodução e atualização da população é repetido até que um critério de parada seja atingido como, por exemplo, um número fixo de gerações. A representação gráfica da sequência de procedimentos realizados no método proposto para resolução do PPMC através de um Algoritmo Genético é apresentada na Figura 1, com detalhamento de cada etapa nas próximas subseções.

3.1. Inicialização

3.1.1. Dados de entrada

No método de solução proposto, as distâncias Euclidianas entre os vértices e as respectivas medianas representam os custos que serão utilizados nos cálculo da Aptidão de cada indivíduo nas gerações. Para isso, é necessário que sejam informados: a localização geográfica de cada vértice, ou seja, a abscissa (x_i) e ordenada (y_i) dos pontos de demanda; o número de medianas (p); as respectivas capacidades de atendimento (C_i) dos vértices caso sejam escolhidos como mediana; e a demanda de cada vértice.

3.1.2. Tamanho da população

Segundo Alp *et al.* (2003), em geral, o tamanho da população em um Algoritmo Genético deve ser suficientemente grande para que a sua diversificação garanta a exploração das potenciais regiões factíveis que contenham soluções de boa qualidade. Por outro lado, populações excessivamente grandes incorrem em tempos de processamento elevados, de modo que uma possível perda de eficiência não compense o ganho de qualidade da solução.

Analogamente àqueles autores, o AG proposto neste arti-

go considera uma população com número de indivíduos resultante de uma formulação empírica parametrizada pelo número de vértices (n). Seja $H=\{h_1, h_2, \dots, h_f\}$ o conjunto de indivíduos, o tamanho da população (f) é dado pelo número inteiro par mais próximo do valor de $17,5 \cdot \ln(n)$, conforme a Equação (7).

$$f = \text{PAR}[17,5 \cdot \ln(n)] \quad (7)$$

3.1.3. Representação do indivíduo

O cromossomo de um indivíduo é definido pelo conjunto $\{V_p\}=\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ ($p \times 1$) contendo os índices dos vértices de demanda escolhidos como medianas. A cada indivíduo está associado um conjunto $\{S_n\}=\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ($n \times 1$), com a i -ésima posição equivalente ao índice do vértice e s_i a mediana a ela associada, tal que o valor inteiro “-1” é atribuído à posição do vértice escolhido como mediana. Assim, $s_i = -1$ para $i = v_1, v_2, \dots, v_p$, conforme exemplificado na Figura 2, em que $\{V_p\}=\{v_1, v_2\}=\{1, 4\}$ e, portanto, $\{S_n\}=\{-1, 4, 1, -1, 1, 4\}$.

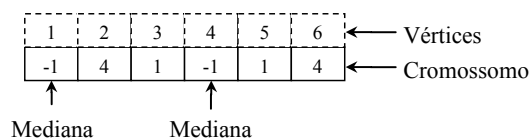


Figura 2. Representação gráfica de um indivíduo da população

Outro conjunto, $\{R_p\}=\{r_1, r_2, \dots, r_p\}$ ($p \times 1$), contém valores reais associados às demandas totais atendidas por cada uma das medianas, tal que a posição do valor nesse conjunto tem correspondência direta com o conjunto $\{V_p\}$. Ainda, cada indivíduo possui o atributo Aptidão, que representa a soma das distâncias entre as medianas (genes) e os seus respectivos clientes, de modo que os indivíduos mais aptos a permanecerem na população entre gerações sucessivas são aqueles com menor valor desse atributo, em consonância com a função objetivo estabelecida na Equação (1).

3.2. Criação da população inicial

Para cada indivíduo da população inicial – com tamanho definido pela Equação (7) – procede-se à escolha das p medianas do PPMC, respeitando-se as suas respectivas capacidades. Para garantir a variabilidade da população inicial do AG, optou-se pela escolha aleatória dos vértices que integram o conjunto de medianas de cada indivíduo.

Assim, o processo de escolha das medianas do conjunto $\{V_p\}$ do primeiro indivíduo da população inicial é realizado aleatoriamente, segundo uma distribuição de probabilidade uniforme, sob a condição de não repetição de um mesmo vértice no conjunto de medianas do indivíduo. Após a escolha de cada vértice “ j ” como mediana, a sua capacidade é atualizada subtraindo-se a sua respectiva demanda do valor C_j pré-definido.

A escolha das medianas dos demais indivíduos é análoga a esta estratégia, sem a imposição de restrições que impeçam a existência de mais de um indivíduo com a mesma configuração do conjunto de medianas. Após a definição do conjunto de medianas de todos os indivíduos da população, o AG é direcionado à atribuição dos vértices de $\{V-V_p\}$, conforme o procedimento descrito na seção a seguir.

3.2.1. Alocação

Os passos apresentados a seguir são atribuídos a todos os indivíduos na etapa de criação da população inicial do Algoritmo Genético e após a execução dos operadores de cruzamento e mutação caracterizados nas seções subsequentes deste artigo.

Inicialmente os vértices não alocados às medianas do conjunto $\{V-V_p\}$ são ordenados em uma sequência crescente em relação às suas respectivas demandas e os 5% primeiros vértices desta lista ordenada são alocados às suas medianas mais próximas. Se a capacidade desta mediana mais próxima for excedida pelo atendimento da demanda de um vértice, este é alocado à segunda mediana mais próxima, ou terceira, ou quarta e assim sucessivamente, até que uma mediana apresente capacidade para atender a demanda deste vértice.

Após a atribuição dos primeiros vértices às medianas, os demais vértices (95% de $\{V-V_p\}$) são escolhidos aleatoriamente – por uma distribuição uniforme – e alocados às medianas respeitando-se as suas capacidades. Esta alocação segue a mesma regra de restrição de capacidade, em que o vértice é alocado à primeira, ou segunda, ou terceira etc., mediana em função de sua capacidade de atendimento disponível.

A alocação de 5% dos vértices de $\{V-V_p\}$ foi definido empiricamente após a aplicação do AG às instâncias de validação utilizadas neste artigo. Esta estratégia garante que sejam encontradas soluções (indivíduos) viáveis na primeira tentativa de alocação dos vértices às medianas, pois a escolha aleatória de todos os indivíduos poderia eventualmente incorrer na alocação de um vértice de grande demanda ao final do processo, resultando em um indivíduo infactível que exigiria um rearranjo dos vértices, com consequente aumento do tempo computacional do AG.

3.3. Cruzamento

Para obtenção das gerações sucessivas do AG, o operador de cruzamento é executado após o agrupamento dos indivíduos aos pares, estes escolhidos aleatoriamente segundo uma distribuição de probabilidade uniforme. Este cruzamento ocorre pela troca de medianas entre os pares indivíduos e posterior realocação dos vértices remanescentes.

O procedimento é tal que, das medianas $\{V_p\}$ de cada par de indivíduos são extraídas aquelas que se repetem em ambos os conjuntos. Do conjunto remanescente, são escolhidas aleatoriamente as medianas a serem trocadas em quantidade definida por uma distribuição uniforme. Após o cruzamento, a realocação dos vértices às novas medianas é realizada conforme descrito na seção 3.2.1.

A atualização da população após a execução do operador de cruzamento entre os indivíduos da população é dada pela criação de um conjunto único contendo os indivíduos da população resultante dos cruzamentos e daqueles que originaram esta população. A população obtida ao final do processo de cruzamento é aquela dada pelos f primeiros indivíduos com menor valor de função Aptidão neste conjunto. Esta estratégia garante que os melhores indivíduos (com menor valor de função Aptidão) permaneçam candidatas a solução ótima do PPMC.

Segundo o procedimento descrito acima, cruzamentos entre indivíduos com conjuntos idênticos de medianas não são realizados, os quais podem não ser exatamente iguais devido à alocação aleatória dos vértices de $\{V-V_p\}$. Observou-se

que esta regra de decisão afeta o tempo computacional do AG, pois nem todos os pares de indivíduos são cruzados. Porém, no procedimento de atualização da população, indivíduos com mesma configuração de medianas podem permanecer na população entre gerações sucessivas devido aos diferentes valores de função Aptidão que podem ter decorrente da alocação aleatória dos vértices.

3.4. Mutação

A mutação dos indivíduos é realizada para diversificação da população e executada através alterações aleatórias nos indivíduos (Correa *et al.*, 2004). Após a troca aleatória de medianas de uma porcentagem dos indivíduos da população, procede-se à realocação dos vértices e avaliação do valor da Aptidão dos indivíduos alterados. De Jong (1975) e Grefenstette (1986) afirmam que a probabilidade de mutação (P_m) deve estar no intervalo $0,1\% \leq P_m \leq 1\%$ em relação ao tamanho da população, entretanto, Srinivas e Patnaik (1994) afirmam que, na prática, este valor deve variar no intervalo $0,1\% \leq P_m \leq 5\%$.

Assim, em toda geração do AG aqui caracterizado, o operador de mutação tem início com a escolha aleatória de 5% dos indivíduos da população que devem sofrer a mutação, segundo uma função de probabilidade uniforme. Para cada indivíduo é determinado aleatoriamente (segundo uma distribuição de probabilidade uniforme no intervalo $[1, p]$) a quantidade e as medianas a serem substituídas, e os novos vértices a serem definidos como medianas. Após a substituição das medianas, procede-se à realocação dos demais vértices segundo o processo descrito na seção 3.2.1 e à atualização da população – segundo a mesma regra do operador de cruzamento – após a mutação dos indivíduos escolhidos aleatoriamente.

3.5. Buscas Locais

Com o intuito de melhorar a solução apresentada pelo indivíduo com o menor valor de Aptidão em cada iteração do Algoritmo Genético, optou-se pela implementação de duas rotinas complementares de busca local. A primeira busca prevê a alteração das medianas associadas aos clientes. Conhecidas as medianas do melhor indivíduo da geração e os clientes a elas alocados, para cada vértice $v_i \in \{V-V_p\}$ e vértice $v_k \in \{V-V_p-v_i\}$ são analisadas algumas condições necessárias para a troca das medianas de v_i e v_k .

Seja $d(v_i; V_{vi})$ a distância (custo) entre um vértice v_i qualquer e a mediana do agrupamento a que este vértice pertence; $d(v_i; V_{vk})$ a distância (custo) entre um vértice v_i qualquer e a mediana do agrupamento a que pertence um vértice v_k qualquer; q_{vi} a demanda de um vértice v_i qualquer; $Q_{V_{vi}}$ a demanda total atendida pela mediana do agrupamento a que pertence um vértice v_i qualquer; e $C_{V_{vi}}$ a capacidade da mediana a que pertence um vértice v_i qualquer. As condições estabelecidas nas Equações (8) a (10) devem ser satisfeitas para que a troca de clientes entre agrupamentos seja efetivada e, caso sejam verdadeiras, os valores das demandas alocadas às medianas e da Aptidão do melhor indivíduo da iteração corrente são atualizados.

$$d(v_i; V_{vk}) + d(v_k; V_{vi}) < d(v_i; V_{vi}) + d(v_k; V_{vk}) \quad (8)$$

$$Q_{V_{vi}} - q_{vi} + q_{vk} < C_{V_{vi}} \quad (9)$$

$$Q_{V_{vk}} - q_{vk} + q_{vi} < C_{V_{vk}} \quad (10)$$

A segunda busca local é realizada para todos os agrupamentos (equivalente ao número de medianas), a cada geração, pela verificação da possibilidade de substituição da mediana de um agrupamento por algum dos pontos de demanda a ela alocado. Esse procedimento é tal que para cada mediana são identificados os vértices a ela associados, calculados os custos (distâncias) totais entre cada um desses vértices e os demais na hipótese deste ser uma mediana. Os custos calculados são analisados e, caso o menor deles corresponda à associação da mediana a um vértice diferente da mediana atual, as trocas são realizadas no indivíduo e o valor de sua Aptidão é atualizado.

3.6. Reconstituição da população

Com o objetivo de melhorar o desempenho do AG, tanto em termos de qualidade da solução quanto em tempo de processamento, optou-se por estabelecer um mecanismo para reconstituição da população após um determinado número de gerações sucessivas resultantes da realização dos operadores de cruzamento e mutação descritos anteriormente.

Assim, a etapa de reconstituição é realizada após a execução de uma quantidade pré-estabelecida do ciclo “Cruzamento-Mutação-Buscas Locais”. A nova população é constituída do mesmo número de indivíduos (f) da população anterior – definido pela Equação (7) – tal que o primeiro indivíduo é aquele com o menor valor de Aptidão da geração corrente.

Outra parcela da nova população é constituída de 50% do número de indivíduos ($0,5f$) e definida segundo um critério de alteração das características deste indivíduo de menor valor da função Aptidão da geração corrente. Esta alteração é tal que um número aleatório entre 1 e o número de medianas do problema (p) é escolhido segundo uma distribuição de probabilidade uniforme e medianas do indivíduo são escolhidas para serem substituídas em quantidade igual a este valor. Novos vértices são escolhidos para substituir estas medianas, também segundo uma distribuição uniforme, e a alocação daqueles remanescentes é realizada segundo os procedimentos apresentados na seção 3.2.1.

Para maior diversificação das soluções, os demais indivíduos da nova população – em quantidade igual a 50% do tamanho da população menos uma unidade ($0,5f-1$) – são definidos pelo mesmo processo de criação da população inicial apresentada na seção 3.1.4.

3.7. Critérios de parada

Existem diferentes critérios que podem ser considerados como regra de encerramento do AG: número de gerações, como em Correa *et al.* (2004); porcentagem dos indivíduos da população com o mesmo valor de Aptidão, como sugerido por Alp *et al.* (2003); ou ainda a combinação de critérios em função do método de solução abordado para resolução de um problema.

Os critérios de parada do AG para resolução do PPMC foram estabelecidos empiricamente com base na avaliação do seu desempenho em relação à qualidade das soluções e tempo computacional para as instâncias de validação utilizadas neste artigo. Assim, foi estabelecido como critério de término do algoritmo a execução da operação de reconstituição da população em quantidade igual valor maior inteiro menor ou igual ao número de indivíduos da população (f)

dividido por 15. Entre cada reconstituição estabeleceu-se o limite de 50 gerações sucessivas obtidas pela execução do operador de cruzamento, intercaladas a cada 5 gerações pela execução do operador de mutação.

4. EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS PARA VALIDAÇÃO DO ALGORITMO

A avaliação do desempenho do algoritmo genético proposto para a resolução do PPMC foi realizada com instâncias que representam dados reais da área central da cidade de São José dos Campos, com diferentes quantidades de vértices e medianas a serem escolhidas [(100 x 10), (200 x 15), (300 x 25), (300 x 30), (402 x 30) e (402 x 40)]. As informações estão disponíveis em <http://www.lac.inpe.br/~lorena/instancias.html>.

Para a avaliação de sua eficiência, o algoritmo foi implementado na linguagem de programação Java® e executado em computador com processador Intel Core i3 M330, 2.13 GHz, 4 GB de memória RAM e sistema operacional Microsoft Windows 7® Home Premium. Os resultados da aplicação do AG às instâncias indicadas são apresentados na Tabela 1.

Da Tabela 1 é possível observar que o método de Chaves *et al.* (2007) identifica as melhores soluções em todas as instâncias associadas ao PPMC utilizadas para validação do AG. Apesar de não identificar estas soluções ótimas em todos os casos, o método descrito neste artigo fornece resultados próximos dos valores ótimos, principalmente para as instâncias de menor porte. Ainda, este método pode ser considerado robusto, pois fornece soluções com pequenos desvios em relação ao valor ótimo, dado os baixos valores de erro médio e desvio padrão decorrentes da execução de 100 replicações para cada conjunto de instâncias.

Por outro lado, observa-se o bom desempenho do AG em termos do tempo computacional necessário para obtenção destas soluções, novamente com ênfase para as instâncias de menor porte, em que foram obtidas soluções de boa qualidade em tempo bastante reduzido (como é o caso do conjunto SJC, cujo valor ótimo foi obtido em pouco mais de 15 segundos).

Apesar dos baixos tempos computacionais, testes indicaram que o AG não converge prematuramente para as soluções identificadas, pois o uso de diferentes valores para os critérios de parada apresentados na seção 3.7 não resultaram em soluções de melhor qualidade. Constatou-se que o aumento do número de gerações sucessivas em que se aplicam os operadores de mutação e cruzamento (e do número de populações reconstituídas) apenas aumenta o tempo de processamento sem melhorias significativas de qualidade das

soluções que justifiquem a alteração dos valores destes parâmetros.

5. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA REAL DE DISTRIBUIÇÃO DE PEÇAS DE UMA MONTADORA

O problema de agrupamento de concessionárias e oficinas pode ser avaliado como o agrupamento de clientes que devem ser atendidos por um mesmo caminhão (ou conjunto de caminhões), de modo que sejam respeitados os seus limites de capacidade de transporte. Assim, sob a premissa de que a frota utilizada é homogênea, o problema pode ser associado a um PPMC em que a capacidade de cada mediana é equivalente à capacidade de um caminhão ou de um conjunto de caminhões.

Desse modo, sabendo-se que a frota de caminhões deve atender os vértices de demanda, o problema resume-se a identificar o número ótimo de veículos a serem utilizados na entrega dos pedidos de modo a minimizar o custo total de operação, tal que um veículo corresponde a um agrupamento resultante da resolução do problema de p -medianas capacitado. No modelo, a avaliação do custo total decorre de duas fontes de custo: a distância euclidiana de deslocamento dos veículos do centro de distribuição às medianas dos agrupamentos; e a soma das distâncias euclidianas entre as medianas e os respectivos clientes de um agrupamento.

Um banco de dados de uma montadora foi disponibilizado aos autores, contendo o endereço (logradouro, número, CEP e Estado) das concessionárias/oficinas, a demanda diária de peças (em m³) nos 25 dias úteis do mês de janeiro de 2011, e a localização do Centro de Distribuição (CD) a partir do qual se originam os caminhões destinados às entregas destas peças. A avaliação destes dados resultou em uma lista de 401 endereços – e respectivos volumes médios de demanda dispersos em todo o Brasil – a partir dos quais foram identificadas as coordenadas geográficas que viabilizaram o cálculo das distâncias Euclidianas entre os locais de demanda.

Nove cenários foram criados para avaliação do número de medianas que minimizam o custo total de atendimento da demanda do CD até os pontos de demanda. Os cenários foram caracterizados segundo o número de medianas, de modo que o primeiro apresenta uma solução com 10 medianas e os cenários sucessivos são definidos pela soma de 5 medianas em relação ao anterior.

A capacidade das medianas em cada cenário foi definida em função da capacidade dos caminhões utilizados no transporte das peças do CD aos locais de demanda. Como a demanda dos clientes foi estabelecida em termos volumétricos

Tabela 1. Resultados da aplicação do AG e comparação com melhores soluções

Instância	n	p	VNS ¹				Algoritmo Genético				
			Solução ótima	Melhor solução	Tempo [s]	Erro (e) [%] ²	Melhor solução	Tempo [s]	Erro (e) [%] ²	e [%] ³	S(e) [%] ⁴
SJC1	100	10	17.288,99	17.288,99	50,50	0,0	17.289,00	15,4	0,0	1,8	1,6
SJC2	200	15	33.270,94	33.270,94	44,08	0,0	33.453,12	72,8	0,5	2,2	0,9
SJC3a	300	25	45.335,16	45.335,16	8.580,30	0,0	45.735,74	199,8	0,9	2,4	0,8
SJC3b	300	30	40.635,90	40.635,90	2.292,86	0,0	41.167,38	129,5	1,3	2,6	0,7
SJC4a	402	30	61.925,51	61.925,51	4.221,47	0,0	63.234,99	362,7	2,1	4,0	1,0
SJC4b	402	40	52.469,96	52.469,96	3.471,44	0,0	53.393,96	426,9	1,8	3,2	0,8

¹ Chaves *et al.* (2007); ² Em relação à solução ótima; ³ Erro médio em 100 replicações; ⁴ Desvio padrão em 100 replicações

Tabela 2. Capacidade das medianas em cada cenário de aplicação do AG

	Cenários								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Medianas (p)	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Capacidade (m^3)	140	100	80	60	60	60	60	60	60
Caminhões equivalentes	7	5	4	3	3	3	3	3	3

cos e as cargas apresentam baixo peso específico, utilizou-se como veículo padrão um caminhão com capacidade máxima teórica de $24,3 m^3$, sendo estabelecida uma capacidade máxima prática (aquela efetivamente disponibilizada por um caminhão) de $20 m^3$.

Assim, a capacidade de uma mediana foi definida em termos de caminhões necessários para transporte da carga alocada a ela. Seja Q a capacidade prática de um caminhão, q_i a demanda do i -ésimo cliente, p o número de medianas do cenário e $\lfloor \cdot \rfloor$ o operador que define o maior inteiro menor ou igual relativo ao valor nele contido, então a capacidade da j -ésima mediana é definido segundo a Equação (11) a seguir.

$$C_j = \text{máximo} \left\{ \left\lfloor \frac{1}{Q} \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^n q_i}{p} \right) \right\rfloor ; \left\lfloor \frac{1}{Q} \cdot \text{máximo} \{q_i\} \right\rfloor \right\} \quad (11)$$

Como exemplo, considere um cenário com 35 medianas em que a divisão da demanda total pelo número de medianas resulta em $68 m^3$ ($68/20 = 3,40 \approx 4$ caminhões) e a maior demanda entre o clientes é de $85 m^3$ ($85/20 = 4,25 \approx 5$ caminhões). Neste caso, o número de caminhões disponibilizados para cada mediana neste cenário deve ser igual a 5 (equivalente a $100 m^3$). Assim, cada cenário de aplicação do AG ao problema de distribuição de peças da montadora pode ser caracterizado segundo a Tabela 2, dado que a maior demanda de um cliente no banco de dados fornecido pela montadora é igual a $47,5 m^3$ ($47,5/20 = 2,38 \approx 3$ caminhões).

A medida de desempenho utilizada para avaliar e comparar os cenários é definida como um custo total, dado pela soma das distâncias totais entre as medianas e os respectivos clientes a elas alocados, e a soma das distâncias entre o CD e as medianas definidas pelo AG, este valor multiplicado pelo número de caminhões necessários para satisfazer a demanda atendida por cada mediana.

5.1. Resultados e Análises

Para cada cenário foram executadas 100 replicações do Algoritmo Genético, identificada aquela que resulta em menor custo de agrupamento dos clientes às medianas e, para esta replicação de mínimo custo, calculadas as distâncias entre o CD e cada uma de suas medianas. Estas distâncias foram então multiplicadas pelo número de caminhões que devem atender as respectivas medianas, definido pelo maior inteiro menor ou igual ao valor da divisão da demanda atendida pela respectiva mediana e a capacidade prática de um caminhão ($20 m^3$).

Na Tabela 3, para cada cenário, são apresentados os melhores resultados dos agrupamentos de medianas e clientes, os tempos computacionais requeridos para obtenção destas soluções e o valor médio e desvio padrão destas duas medidas de desempenho. São apresentados, ainda, os custos (distâncias) entre o CD e as medianas de cada cenário, ponderado pelo número de caminhões necessários para atender a demanda de cada mediana, e o custo total conforme estabelecido anteriormente.

Da relação existente entre o número de medianas, soma das distâncias do CD e dos clientes às respectivas medianas, tem-se que a distância total é decrescente até o cenário com $p = 35$, a partir do qual o custo total começa a aumentar novamente (Figura 3). Assim, a análise dos custos permite inferir que o cenário com 35 medianas é a alternativa de agrupamento que apresenta menor distância total percorrida na operação de distribuição de peças automotivas.

Os tempos computacionais necessários para obtenção das soluções de mínimo custo podem ser considerados baixos em relação ao número de clientes e medianas, salientando-se a relação direta entre o aumento desta medida de desempenho com o crescimento do número de medianas dos cenários.

Foram observadas diferenças expressivas entre os valores do tempo de processamento para as instâncias de validação de mesmo porte em relação às de aplicação do modelo. Para os problemas com 402 clientes (SJC4a com 30 medianas e SJC4b com 40 medianas), os tempos computacionais das

Tabela 3. Resultados da aplicação do AG ao problema da distribuição de peças

n	p	Custo AG ($x 10^8 km$)			Tempo (s)			Custo CD às medianas ($x 10^8 km$)	Custo Total ($x 10^8 km$)
		Mínimo	Média	S^l	Mínimo ²	Média	S^l		
401	10	9,073	9,273	0,137	77,7	80,2	5,6	3,810	12,882
401	15	6,515	6,712	0,099	89,5	87,7	4,1	4,337	10,852
401	20	5,255	5,363	0,054	96,2	94,6	7,0	4,505	9,760
401	25	4,742	4,918	0,069	111,1	102,4	4,0	4,513	9,254
401	30	3,814	3,962	0,056	103,9	102,4	4,3	5,024	8,838
401	35	3,176	3,380	0,038	102,2	104,9	4,4	5,148	8,324
401	40	2,892	2,954	0,028	119,5	108,4	5,5	5,645	8,537
401	45	2,586	2,625	0,020	97,2	105,2	5,0	6,549	9,135
401	50	2,311	2,354	0,016	117,5	112,4	7,9	6,919	9,230

¹ Desvio padrão em 100 replicações; ² Para obtenção da solução mínimo custo

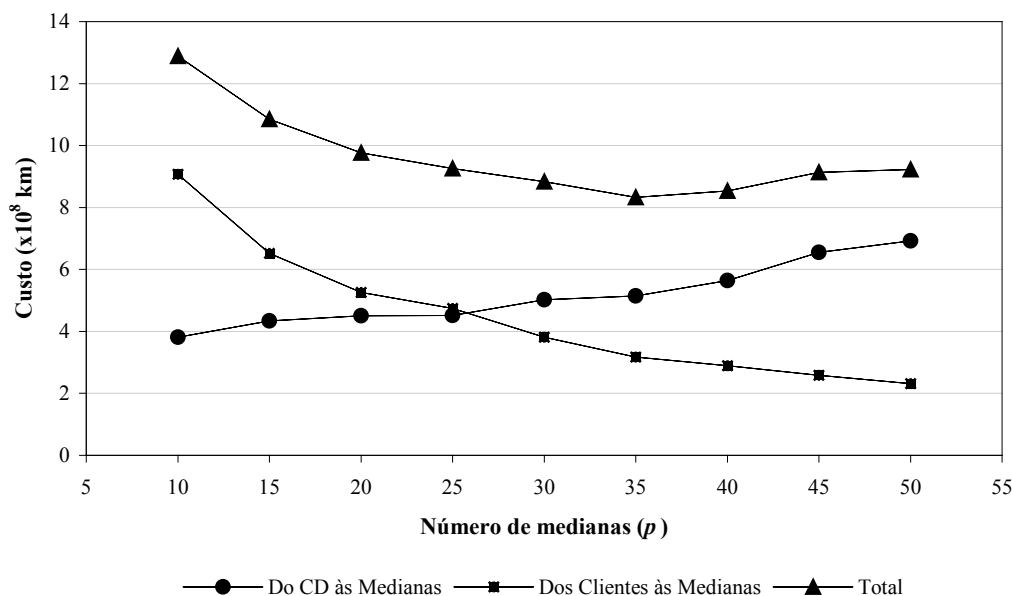


Figura 3. Curvas de custo mínimo em função do número de medianas

melhores soluções são 362,7 e 426,9 segundos, respectivamente, enquanto na aplicação do problema, com 401 clientes, os tempos são de 92,3 e 94,8 segundos para o mesmo número de medianas (30 e 40, respectivamente).

Após a realização de testes, verificou-se que a variação da qualidade das soluções nas instâncias de aplicação do algoritmo não foi significativa alterando-se os critérios de parada apresentados na seção 3.7 (analogamente ao realizado em relação às instâncias de validação). Assim, uma causa para a diferença entre estes tempos pode estar relacionada ao fato de que a estratégia de cruzamento descrita neste artigo, que está sujeita ao pareamento de indivíduos com mesma configuração do conjunto de medianas $\{V_p\}$, podendo incorrer na execução deste operador em apenas uma parcela dos pares de indivíduos da população nas gerações.

No caso das instâncias de aplicação do AG, observou-se que a dispersão dos vértices é maior do que nas instâncias de validação, e que este fator incorre em maior quantidade de indivíduos com conjuntos $\{V_p\}$ idênticos, o que implica na menor frequência de execução do operador de cruzamento e redução do tempo computacional do algoritmo.

Na Figura 4 e na Figura 5, apresentam-se as distribuições

das medianas e os respectivos clientes associados aos melhores resultados do Algoritmo Genético para os cenários com 10, 35 e 50 agrupamentos. Nestas ilustrações, as medianas estão destacadas pelo símbolo “X” e seus respectivos clientes estão conectados a elas por uma linha contínua.

A comparação visual dos três cenários mostra que na replicação de menor custo total considerando 10 medianas a coesão dos agrupamentos é baixa. Na maioria das situações – principalmente nos dois agrupamentos na parte superior da Figura 4 (esq.) – os caminhões precisaram percorrer distâncias expressivas em sentidos opostos para atender clientes do mesmo agrupamento. Em contrapartida, no cenário com 50 medianas, na Figura 4 (dir.), existem alguns agrupamentos que atendem pouco ou nenhum cliente, satisfazendo apenas a sua própria demanda neste último caso.

Ainda, pelas informações da Tabela 3 e análise da Figura 4, é possível observar que no cenário com 50 medianas a soma das distâncias percorridas nos agrupamentos é menor do que em relação ao cenário com 10 medianas. Entretanto, a soma das distâncias entre o CD e as medianas naquele cenário será maior do que neste, dado que a quantidade de agrupamentos é maior.

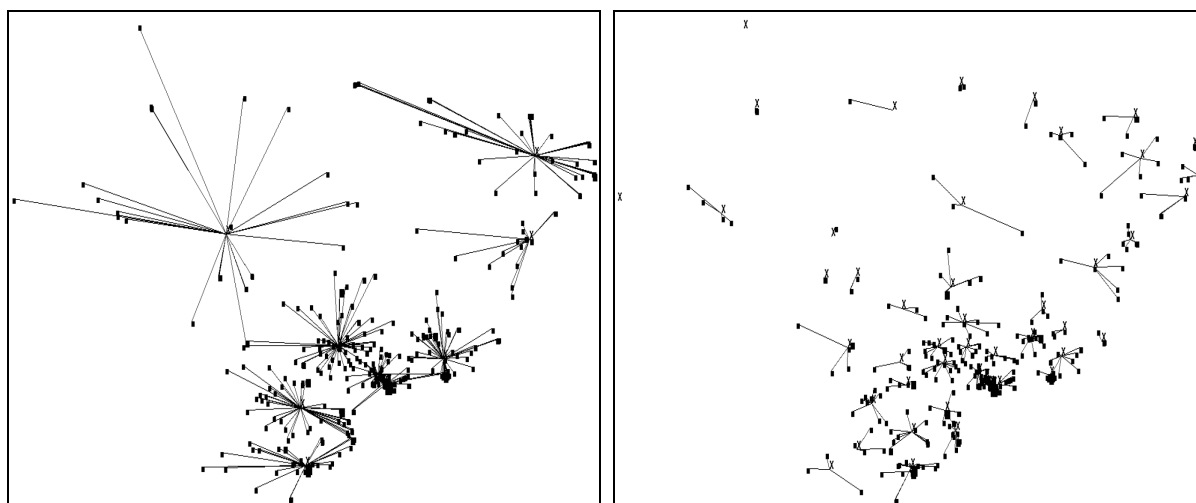


Figura 4. Replicação de mínimo custo no cenário de 10 medianas (esq.) e 50 medianas (dir.)

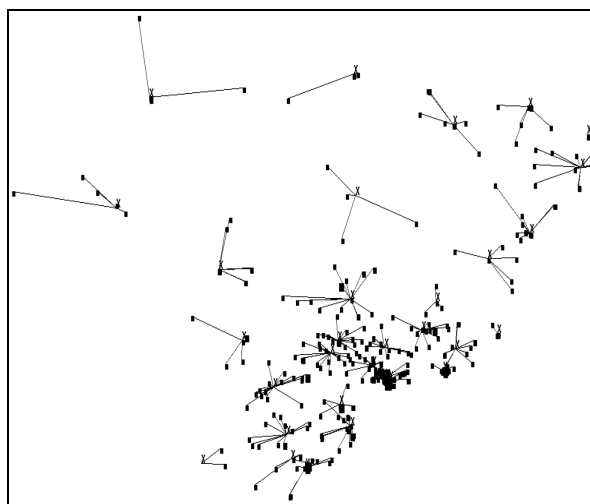


Figura 5. Resultado de mínimo custo entre todos os cenários e replicações (35 medianas)

Como apresentado na Figura 3, existe um ponto de equilíbrio em que a soma das distâncias entre medianas e clientes é compensada pela soma das distâncias entre o CD e as medianas, que no caso refere-se ao cenário com 35 medianas representado na Figura 5.

Na ilustração acima, percebe-se que os agrupamentos estão mais coesos do que aqueles formados no cenário de mínimo custo com 10 medianas, gerando menores deslocamentos dentro dos agrupamentos, porém com maior soma das distâncias entre o CD e as medianas. Por outro lado, em relação ao cenário com 50 medianas, existem mais clientes atendidos por uma mesma mediana, o que aumenta a utilização dos caminhões e, ao mesmo tempo, diminui a soma das distâncias entre as medianas e o centro de distribuição.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados de validação do Algoritmo Genético indicam que o método proposto neste artigo apresenta soluções satisfatórias para o problema de p -medianas capacitado. Apesar de não terem sido obtidas as soluções ótimas em todas as instâncias de validação do AG, o objetivo de estabelecer um método de solução para o problema real de distribuição de peças automotivas de uma grande fábrica brasileira foi atingido.

A realização de testes de desempenho do AG indicou que a etapa de alocação dos vértices às medianas de um indivíduo satisfazendo as restrições de capacidade de atendimento da demanda exerce grande influência sobre o tempo de processamento do algoritmo. A estratégia de alocação apresentada na seção 3.2.1 garante a variabilidade da população de modo a evitar a estagnação do algoritmo em soluções ótimas locais, mostrando-se um procedimento eficiente no sentido de proporcionar menores tempos computacionais para obtenção de soluções de boa qualidade.

O procedimento de escolha aleatória dos indivíduos e genes a serem cruzados e mutados também se mostrou eficiente para impedir que o algoritmo permanecesse estagnado em uma solução de mínimo local. Cabe salientar que a estratégia de atualização da população exerce influência significativa sobre a qualidade das soluções após a aplicação dos operadores de cruzamento e mutação, sobretudo em relação à manutenção da variabilidade dos indivíduos da população entre gerações.

As soluções mostraram significativas variações negativas

quando o número de indivíduos envolvidos no cruzamento foi reduzido, e não melhoraram quando o número de indivíduos em que foram aplicados os operadores de mutação foi aumentado em relação ao estabelecido neste artigo (5% da população), sendo observado que a alteração destes valores não afeta de maneira significativa o tempo de processamento do AG. Ainda, em relação aos critérios de parada, a variação dos parâmetros do AG indica que o tempo computacional é sensível ao número de iterações em que são executados os operadores de cruzamento e de mutação e a reconstituição da população.

A adaptação do modelo ao problema de distribuição de peças automotivas a partir de um centro de distribuição até concessionárias e oficinas indica que o método pode ser utilizado como ferramenta para as empresas prestadoras de serviço de transporte – para definição do tamanho da frota a ser utilizada na operação – e para gestão de montadoras nas negociações do custo total de transporte.

Pela facilidade do uso, a ferramenta pode ser utilizada como um Sistema de Auxílio à Decisão para alocação mensal da frota considerando os volumes previstos de vendas, e para avaliação do aproveitamento da frota pela comparação entre o uso dos veículos em cada cenário e as distâncias percorridas pela alocação real destes ao final de cada período.

Do ponto de vista metodológico, como estímulo para trabalhos futuros sugere-se a identificação de melhores soluções fornecidas pelo AG pela implementação de métodos de buscas locais diferentes dos indicados e associação de um método heurístico alternativo para geração de soluções de melhor qualidade (por exemplo, o *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure – GRASP*) inserido na etapa de criação e reconstituição da população.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Equipe Editorial da Revista Transportes e aos avaliadores do manuscrito pelas contribuições para melhoria do algoritmo e dos resultados obtidos na aplicação do problema.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alp, O.; E. Erkut e Z. Drezner (2003) An Efficient Genetic Algorithm for the p -Median Problem. *Annals of Operations Research*, v. 122, p. 21–42. DOI: 10.1023/A:1026130003508.

- Chaves, A. A.; F. A. Correa e L. A. N. Lorena (2007) Clustering search heuristic for the capacitated p-median problem. *Advances in Software Computing Series*, v. 44, p. 136–43. DOI: [10.1007/978-3-540-74972-1_19](https://doi.org/10.1007/978-3-540-74972-1_19).
- Conceição Neto, A. S.; J. J. Ferreira; L. M. C. Machado e M. V. Silva (2008) Análise de cluster aplicada à logística: Definição de zonas de transporte para uma empresa do setor siderúrgico. *Anais do XXVIII Encontro Nacional de Engenharia de Produção*, ABEPRO, Rio de Janeiro.
- Correa, E. S.; M. T. Steiner; A. A. Freitas e C. Carnieri (2004) A genetic algorithm for solving a capacitated p-median problem. *Numerical Algorithms*, v. 35, p. 373–388. DOI: [10.1023/B:NUMA.0000021767.42899.31](https://doi.org/10.1023/B:NUMA.0000021767.42899.31).
- De Jong, K. A. (1975) Analysis of the Behavior of a Class of Genetic Adaptive Systems. *Technical Report n. 185*. Computer and Communication Sciences Department, University of Michigan.
- Diaz, J.A. e E. Fernández (2004) Hybrid Scatter Search and Path Relinking for the capacitated p-Median problem. *European Journal of Operational Research*, v. 169, n. 2, p. 570–585. DOI: [10.1016/j.ejor.2004.08.016](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2004.08.016).
- Fleszar, K. e K. Hindi (2008) An effective VNS for the capacitated p-median problem. *European Journal of Operational Research*, v. 191, n. 3, p. 612–622. DOI: [10.1016/j.ejor.2006.12.055](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.12.055).
- Fonseca, A. P.; P. P. G. Neto e E. P. S. Silva (2010) Planejamento de rede logística de produtos agrícolas orgânicos: agrupamento de unidades em arranjos produtivos locais como estratégia para redução do custo logístico. *Transportes*, v. 18, n. 3, p. 51–59.
- França, P.; Sosa, N. e V. Pureza (1999) An adaptive tabu search algorithm for the capacitated clustering problem. *International Transactions in Operational Research*, v. 6, n. 6, p. 665–678. DOI: [10.1111/j.1475-3995.1999.tb00180.x](https://doi.org/10.1111/j.1475-3995.1999.tb00180.x).
- Grefenstette, J. J. (1986) Optimization of Control Parameters for Genetic Algorithms. *IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics*, SMC-16, 122–128. DOI: [10.1109/TSMC.1986.289288](https://doi.org/10.1109/TSMC.1986.289288).
- Holland, J. H. (1992) *Adaptation in natural and artificial systems: An introductory analysis with applications to biology, control and artificial intelligence* (2nd ed.). Cambridge University Press, Cambridge.
- Koskovidis, Y.A. e W. R. Powell (1992) Clustering algorithms for consolidation of costumes orders into vehicle shipments. *Transportation Research B*, v. 26, n. 5, p. 365–379. DOI: [10.1016/0191-2615\(92\)90032-R](https://doi.org/10.1016/0191-2615(92)90032-R).
- Lorena, L. A. N. e J. C. Furtado (2001) Constructive genetic algorithm for clustering problems. *Evolutionary Computation*, v. 9, n. 3, p. 309–327. DOI: [10.1162/106365601750406019](https://doi.org/10.1162/106365601750406019).
- Lorena, L. A. N. e E. L. F. Senne (2003) Local search heuristics for capacitated p-median problems. *Networks and Spatial Economics*, v. 3, p. 409–419. DOI: [10.1023/A:1027353520175](https://doi.org/10.1023/A:1027353520175).
- Lorena, L. A. N. e E. L. F. Senne (2004) A Column Generation Approach to Capacitated p-Median Problems. *Computers & Operations Research*, v. 31, n. 6, p. 863–876. DOI: [10.1016/S0305-0548\(03\)00039-X](https://doi.org/10.1016/S0305-0548(03)00039-X).
- Maniezzo, V.; A. Mingozzi e R. Baldacci (1998) A bionomic approach to the capacitated p-median problem. *Journal of Heuristics*, v. 4, p. 263–280. DOI: [10.1023/A:1009665717611](https://doi.org/10.1023/A:1009665717611).
- Ming, S. P. e K. S. Cheng (2007) Evolution-Based Tabu Search Approach to Automatic Clustering. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Part C: Applications and Reviews*, v. 37, n. 5, 827–838. DOI: [10.1109/TSMCC.2007.900666](https://doi.org/10.1109/TSMCC.2007.900666).
- Mulvey, J. M. e M. P. Beck (1984) Solving capacitated clustering problems. *European Journal of Operational Research*, v. 18, n. 3, p. 339–348.
- Osman, I.H. e N. Christofides (1994) Capacitated clustering problems by hybrid simulated annealing and tabu search. *International Transactions in Operational Research*, v. 1, n. 3, p. 317–336. DOI: [10.1111/1475-3995.d01-43](https://doi.org/10.1111/1475-3995.d01-43).
- Pankratz G. (2005) Dynamic vehicle routing by means of a genetic algorithm. *International Journal of Physical Distribution and Logistics Management*, v. 35, n. 5, p. 362–383. DOI: [10.1108/0960030510607346](https://doi.org/10.1108/0960030510607346).
- Pirkul, H.; R. Gupta e E. Rolland (1999) VisOpt: a visual interactive optimization tool for p-median problems. *Decision Support Systems*, v. 26, n. 3, p. 209–223. DOI: [10.1016/S0167-9236\(99\)00032-9](https://doi.org/10.1016/S0167-9236(99)00032-9).
- Reese, J. (2006) Solution methods for the p-median problem: An annotated bibliography. *Networks*, v. 48, n. 3, p. 125–142.
- Scheuerer, S. e R. Wendolsky (2006) A Scatter Search heuristic for the capacitated clustering problem. *European Journal of Operational Research*, v. 169, n. 2, p. 533–547. DOI: [10.1016/j.ejor.2004.08.014](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2004.08.014).
- Senne, E. L. F.; L. A. N. Lorena e S. N. A. Salomão (2007) Métodos de geração de colunas para problemas de atribuição. *Produção*, São Paulo, v. 17, n. 1, p. 71–83. DOI: [10.1590/S0103-65132007000100005](https://doi.org/10.1590/S0103-65132007000100005).
- Srinivas, M e L. M. Patnaik (1994) Adaptive Probabilities of Crossover and Mutation in Genetic Algorithms. *IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics*, v. 24, n. 4, 656–667. DOI: [10.1109/21.286385](https://doi.org/10.1109/21.286385).