O problema de localização de terminais concentradores e sua aplicação nas redes de transporte intermodal do país

Adriano Dutra de Vasconcelos[1]; Carlos David Nassi[2]; Luiz Antônio Silveira Lopes[3]

Resumo: Este trabalho apresenta uma revisão bibliográfica em Otimização Combinatória e Programação Matemática sobre os modelos de localização de *hubs* de maior utilidade para os projetos de instalação de terminais intermodais de transporte no Brasil. Esta pesquisa foi motivada pela recente alteração na legislação sobre concessão, arrendamento e autorização de instalações portuárias, bem como pelo cenário de incentivo governamental para utilização do transporte intermodal no País. Aborda-se a classificação dos tipos de métodos, os modelos de formulação matemática dos problemas e as técnicas de solução dos mesmos.

Abstract: This paper presents a survey on Combinatorial Optimization and Mathematical Programming dealing with the hub location models most useful to projects of intermodal terminal installation in Brazil. This research was motivated by the latest changes at the legislation on port concession, leasing and installation authorization, as well as by the scenery of government incentive to the use of intermodal transport inside the Country. It approaches the classification of method types, the mathematical formulation models of the problems and their solution techniques.

1. INTRODUÇÃO

O Decreto da Presidência da República N°. 6620 de 29 de outubro de 2008 disciplinou a concessão de portos, bem como o arrendamento e a autorização de instalações portuárias marítimas. Tal ato cria isonomia e oportunidades de investimentos para a iniciativa privada. Neste sentido, uma das primeiras questões a serem resolvidas é a localização ótima de novos empreendimentos. Assim, cabe ao governo a determinação das áreas costeiras em que se pretende permitir tal instalação (definição que obrigatoriamente passa por atualização bienal). E, por parte de cada investidor, deverá ser determinado o lugar exato onde localizar seu terminal portuário.

Do lado da administração pública, o problema foi resolvido com a elaboração do Plano Geral de Outorgas para o Subsetor Portuário (ANTAQ, 2010) e sua subsequente aprovação pela Secretaria Especial de Portos. Do lado empresarial, cada investidor terá que demonstrar a viabilidade técnica, operacional e econômica do seu projeto específico, bem como seu impacto concorrencial, o que passa por um estudo para localização otimizada do terminal portuário.

No setor ferroviário, embora não haja um marco legislativo tão novo como o já referido, os problemas de localização também não são raros, uma vez que o volume crescente de cargas transportadas no setor (conforme se verifica em ANTF, 2010) acaba levando a novos investimentos em terminais intermodais por parte das concessionárias.

O incentivo ao transporte intermodal gerado pela meta do Governo Federal de reequilíbrio da matriz modal de movimentação de cargas no País também contribui para investimentos em infra-estrutura de terminais intermodais.

No modo aquaviário, a recente abertura gera inclusive uma expectativa de aumento deste tipo de investimento, haja vista a demanda reprimida anteriormente existente.

Neste contexto, julga-se apropriado um estudo sobre os métodos de localização de terminais de transbordo, a fim de constituir uma base teórica para análises de viabilidade de projetos como os já referidos.

Embora a motivação inicial tenha levado o estudo a enfocar sistemas de transportes que por natureza são intermodais, a teoria abordada a seguir também pode ser aplicada aos casos de terminais unimodais e até mesmo a outros tipos de redes (e. g., telecomunicações).

Dados a estrutura física dos sistemas de transportes e o objeto de estudo exposto, pode-se afirmar que as metodologias de localização mais adequadas são aquelas baseadas na Otimização Combinatória – cujo processo de modelagem dispõe de uma ferramenta fundamental: o grafo.

O modelo de localização específico a ser utilizado em cada aplicação depende do tipo de fluxo em rede analisado. Por exemplo, o escoamento de *commodities* brasileiras até os portos (para exportação) não apresenta uma demanda bem definida entre os produtores e os terminais portuários, de modo que as cargas de

[1] **Adriano Dutra de Vasconcelos,** Programa de Engenharia de Transportes - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. (e-mail: dutra@dec.eb.mil.br).

[2] **Carlos David Nassi,** Programa de Engenharia de Transportes - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. (e-mail: nassi@pet.coppe.ufrj.br).

[3] **Luiz Antônio Silveira Lopes,** Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. (e-mail: laslopes@ime.eb.br).

Manuscrito recebido em 2/11/2009 e aprovado para publicação em 8/4/2010. Este artigo é parte de TRANSPORTES, volume XVIII, número 2, junho de 2010. ISSN: 2237-1346 (online).

uma origem não necessariamente têm que seguir sempre para um mesmo porto, isto é, a cada safra, um produtor de soja pode variar o porto de destino de sua carga sem que isto modifique significativamente sua venda. Portanto, neste caso, não há um fluxo previamente determinado entre cada par origem-destino (OD), existem apenas as quantidades que se pretende exportar a partir de cada origem. Pois a demanda no escoamento de produção até os portos é bastante sensível às mudanças na oferta de infra-estrutura de transporte.

No sentido inverso (fluxos das importações dos portos até seus destinos), o quadro se repete, existem somente as quantidades a serem recebidas em cada ponto no País, de modo que os fluxos podem iniciar em quaisquer portos disponíveis. Até mesmo porque, no transporte marítimo de longo curso, não é comum haver diferença no valor de frete quando se variam os portos a serem utilizados na costa brasileira, isto é, um navio graneleiro trazendo fertilizantes do Egito para o Brasil cobraria a mesma tarifa quer o porto de desembarque se localizasse em Recife ou Paranaguá.

Para estes casos em que não existe uma matriz de demanda entre pares OD previamente estabelecida podem ser empregados tanto os modelos de localização de facilidades clássicos quanto os de fluxos em rede – já bastante abordados na literatura sobre Otimização Combinatória.

Porém há os casos onde uma matriz OD de fluxos pré-determinados é um dado de entrada do problema. Por exemplo, uma cadeia de suprimentos em que um produtor de aço atende demandas anuais regulares e bem definidas em diversos centros distribuidores do País. Se este produtor decidir enviar cargas a todos estes centros exceto para um e em seguida tentar entregar esta única carga não enviada em algum dos demais centros "já abastecidos", ele não terá sucesso. E, se uma empresa ferroviária atende este transporte de aço e ainda outras cadeias similares, seu planejamento terá que considerar sempre uma matriz de fluxos com origem e destino já pré-estabelecidos.

Para determinação da posição de novos terminais concentradores em sistemas com demanda bem definida entre cada par OD (como o deste último exemplo), é necessário aplicar outra classe (mais complexa) de modelos, a dos problemas de localização de *hubs*.

Tal classe é relativamente ainda pouco explorada e tem ampla aplicação nos projetos de transporte referidos inicialmente. Desta constatação surgiu o <u>objetivo do presente trabalho</u>: realizar uma <u>análise do estado da arte</u> destes modelos de localização de *hubs* <u>direcionada</u> para os referidos projetos. Sendo incluídos neste estudo os seguintes tópicos: classificação, modelos de formulações matemáticas dos problemas e as técnicas de solução dos mesmos.

Para ilustrar a utilidade destes modelos citam-se alguns exemplos de seu emprego prático:

- localização de terminais intermodais ao longo de uma ferrovia, hidrovia ou linha de cabotagem;
- localização de aeroportos públicos;
- localização de terminais unimodais para consolidação e desconsolidação de *LCL* (*less than container load,* carga fracionada).

2. O MODELO DE REDE *HUB-AND-SPOKE*

Uma rede *hub-and-spoke* é aquela em que os vértices concentradores (*hubs*) se conectam aos nós comuns por meio de vias para veículos de menor capacidade (conhecidas como *spokes*), enquanto a conexão entre os próprios terminais concentradores é feita por meios de maior capacidade (chamados de eixos troncos ou *shuttle services*, Figura 1), os quais proporcionam as maiores economias de escala. Portanto um hub recebe a convergência de diversos fluxos (oriundos dos nós comuns) e os direciona para outro hub (via um eixo tronco) ou os distribui em seguida diretamente a vértices comuns da rede (via *spokes*). No sentido inverso, analogamente o hub distribui fluxos oriundos de um meio de grande capacidade (e/ou de diversos meios de menores capacidades).

O Problema de Localização de *Hubs* consiste em se localizar terminais concentradores em uma rede e

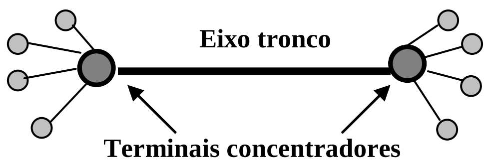

Figura 1. Esquema de uma rede *hub-and-spoke*

também em se atribuir a estes *hubs* os demais vértices (terminais comuns), de modo a proporcionar o roteamento ótimo dos fluxos de transporte entre os diversos pares de nós, origens-destinos. Nota-se que não se define aqui qual é o fluxo ótimo, já que há critérios específicos para cada tipo de problema de localização de *hub*, tais como mínima soma (p-medianas), mínimo máximo caminho (p-centros e máxima cobertura) etc..

3. TIPOS DE PROBLEMAS DE LOCALIZAÇÃO DE *HUBS* (PL*H*)

Como cada tipo de problema é definido por uma combinação de algumas das características básicas dos sistemas *hub-and-spoke*, então o primeiro passo é descrever cada uma destas, começando por aquelas que dizem respeito à topologia da rede do problema:

- o tipo de alocação dos terminais comuns ao *hub* (sendo única quando um terminal comum pode se conectar a apenas um *hub* da rede e múltipla quando inexiste tal restrição);

- a permissão ou não de comunicação direta entre nós comuns e
- a conectividade entre *hubs* (total ou parcial).

Uma quarta característica é a existência ou não de restrições de capacidade em vértices ou arcos, o que limita o fluxo máximo no caminho que inclui o elemento "capacitado". Assim, o problema é dito capacitado quando há restrição em algum elemento e não-capacitado no caso contrário.

Outra característica é o tipo de objetivo da otimização: localização de p-*hub* medianas (mínima soma), localização de *hubs* com custos fixos (mínima soma), localização de p-*hub* centros (mínimo máximo caminho) e localização de *hubs* para cobertura de rede (mínimo máximo caminho). Uma observação interessante é que, para quase todos os modelos de localização de *hubs*, existem versões análogas de modelos de localização de facilidades clássicos.

A sexta característica identificada nestes problemas é o modo de determinação do número de *hubs* na rede, que pode ser exógeno ou endógeno (O'Kelly, 1992). No primeiro caso, o número de *hubs* é definido arbitrariamente pelo analista por razões, então tal número se torna mais uma restrição na formulação do programa de otimização, que costuma ser denominado problema de localização de p-*hubs*. No segundo caso, o número de *hubs* é uma variável do problema sendo definido pelo próprio processo de otimização.

Tendo em vista que a classificação dos problemas pelo tipo de função objetivo tem recebido grande atenção na literatura científica, descrever-se-ão a seguir, sucintamente, as propriedades mais importantes de cada um dos quatro tipos básicos principais (conforme Campbell, 1994 e Alumur *et al.*., 2009).

<u>O Problema de Localização de p-*Hub* Medianas</u> consiste em se determinar os locais numa rede para a instalação de um número p (pré-determinado) de *hubs* e em se atribuir cada fluxo entre dois vértices (origem-destino) a um caminho que passe ou não por *hubs*, de modo que os fluxos de transportes na rede tenham o menor custo total possível. No início das pesquisas sobre terminais concentradores, este era o tipo de problema mais investigado. Para maiores detalhes, deve-se consultar Alumur e Kara (2008), Skorin-Kapov *et al.*. (1996) e O'Kelly *et al.*. (1996).

<u>O Problema de Localização de *Hubs* com Custos Fixos</u> é muito similar ao de p-*Hub* Medianas e, em termos de formulação, difere deste basicamente em dois aspectos: na computação do custo total (onde são incluídos os custos fixos dos terminais e não apenas os de transporte) e na determinação do número de *hubs* que é quase sempre endógena. Atualmente, tem sido o problema de localização de *hubs* com maior número de publicações.

<u>O Problema de Localização de p-*Hub* Centros</u> é do tipo mínimo máximo custo. Campbell (1994) define as três classes mais comuns destes problemas: minimização do máximo custo de transporte entre todos os pares origem-destino; minimização do máximo custo de transporte entre todos os arcos da rede; e minimização do máximo custo de transporte entre todos os pares origem-*hub* ou *hub*-destino. O referido autor também apresentou exemplos em que os três casos se aplicam respectivamente: transporte de cargas urgentes ou perecíveis, transporte de cargas que dependem de apoio no terminal (e. g., refrigeração), sistemas em que é necessário evitar longas viagens para os motoristas dos veículos de coleta e distribuição. No Problema de Localização de p-*Hub* Centros, é muito comum a utilização do tempo no lugar do custo. Para maiores detalhes, ver também Kara e Tansel (2000).

<u>O Problema de Cobertura com *Hubs*</u> é análogo aos problemas clássicos de cobertura, em que um ponto de demanda é dito coberto por um ponto de distribuição se aquele está a menos de uma distância crítica deste (ou de um custo crítico, ou de um intervalo de tempo crítico etc.). Na cobertura com *hubs*, Campbell (1994) define três casos em que um par origem-destino (*i, j*) está coberto por um par de *hubs* (*k, m*): o custo de transporte de *i* para *j* por meio dos *hubs* *k* e *m* não excede determinado limite; o custo em qualquer arco do caminho *ijkm* não excede o limite; o custo nos arcos origem-*hub* ou *hub*-destino não excedem o limite. Estes três casos podem ser ilustrados respectivamente pelos mesmos três exemplos apresentados para o problema de p-Centros. É importante ressaltar que os problemas de cobertura se dividem em dois grupos principais: o problema de cobertura da rede, cujo objetivo é cobrir com *hubs* todos os fluxos origem-destino, minimizando o custo de instalação do total de *hubs* necessários para isto; e o problema de máxima cobertura, onde se busca cobrir o máximo de fluxos, utilizando um número pré-estabelecido de *hubs*. Para maiores detalhes deve-se recorrer também a Kara e Tansel (2003).

4. EVOLUÇÃO DAS FORMULAÇÕES DOS PL*H* COM CUSTOS FIXOS

Neste item aborda-se o processo de desenvolvimento das formulações matemáticas para problemas de localização de *hubs* com custos fixos (tratados neste trabalho por PL*H*-CF e conhecidos na literatura científica por *HLP* apenas, já que, na sigla em Inglês é comum suprimir a expressão custos fixos). A atenção especial que se dedica ao principal problema de localização de *hubs* (entre os quatro classificados por tipo de função objetivo – descritos no item anterior) se deve ao fato de este ser destacadamente o mais utilizado nas aplicações que motivaram esta pesquisa (descritas no início do trabalho), uma vez que os modelos de p-*Hub* Medianas e de p-*Hub* Centros não incluem os importantes custos fixos de instalação dos terminais, enquanto o problema de cobertura com *hubs* tem rara aplicação prática nos referidos casos de interesse.

Goldman (1969) é conhecido como o primeiro trabalho publicado sobre o Problema de Localização de Terminais Concentradores. Ele apresenta matematicamente a ideia de otimização do problema e realiza algumas demonstrações formais. Entretanto O'Kelly (1987) é reconhecido como o introdutor da primeira formulação matemática canônica do PL*H*.

4.1. Dados básicos das formulações do PL*H*

Para se definir matematicamente tal problema é preciso entender a rede de transportes em estudo como sendo representada por um grafo $G = (N, A)$, em que cada vértice do conjunto N corresponde a um ponto de origem e destino dos fluxos (que pode vir a ser selecionado para a instalação de um *hub*), enquanto os arcos do conjunto A constituem os caminhos. Define-se $H \subset N$ como o subconjunto dos vértices considerados passíveis de receberem a instalação de um novo terminal *hub*. Tal subconjunto é normalmente determinado arbitrariamente e, conforme sua própria definição, pode ser o próprio N. $W = | w_{ij} |$ é definida como a matriz de demanda de fluxos $\boldsymbol{w_{ij}}$ de um nó i para outro nó j qualquer, e tal fluxo pode passar por um ou dois nós *hub* intermediários, compondo-se um caminho $i \rightarrow k \rightarrow m \rightarrow j$, (mais frequentemente representado pela sequência *ijkm*). Note que, apesar de possível, em geral na Engenharia de Transportes, não se considera a utilização de mais de dois *hubs* no trajeto entre um par origem-destino, pois, tendo em vista que todos os *hubs* concentram muitos fluxos, raramente é necessário modelar explicitamente a passagem por mais de dois terminais concentradores.

O custo de transporte da demanda $\boldsymbol{w_{ij}}$ por um caminho *ijkm* é dado pela equação 1:

$$C_{ijkm} = w_{ij} \cdot \left(\chi \cdot c_{ik} + \alpha \cdot c_{km} + \delta \cdot c_{mj} \right) \tag{1}$$

em que,

c_{ik}, c_{km}, c_{mj} : custos unitários de transportes referentes a cada subtrecho;

χ, α, δ : fatores de desconto devido a economias de escala;

$\boldsymbol{y_k}$ é a variável binária que define se um *hub* será instalado ou não em k (sendo igual a 1 ou 0) e $\boldsymbol{C_k}$ o custo desta possível instalação. Nas formulações tetra-indexadas, x_{ijkm} é definida como a variável referente à fração de w_{ij} que passa pelos *hubs* k e m.

4.2. Primeiras formulações

A primeira formulação do PL*H*-CF foi proposta por O'Kelly (1992) para o caso não-capacitado e com alocação única, tendo sido concebida na forma de programação inteira quadrática, conforme se verifica a seguir.

$$\begin{aligned} Min \sum_{i \in N} \sum_{k \in N} x_{ik} \cdot c_{ik} \cdot (O_i + D_i) + \ldots \\ \ldots + \sum_{j \in N} \sum_{m \in N} x_{jm} \cdot \sum_{i \in N} \sum_{k \in N} x_{ik} \cdot \alpha \cdot \left(w_{ij} \cdot c_{km} \right) + \sum_{k \in N} y_k \cdot C_k \end{aligned} \tag{2a}$$

Sujeita a,

$$\sum_{k \in N} x_{ik} = 1, \forall i \in N \tag{2b}$$

$$y_k - \sum_{i \in N} x_{ik} \leq 0, \forall k \in N \tag{2c}$$

$$x_{ik} \in \{0,1\}, \forall i \in N, \forall k \in N \tag{2d}$$

$$y_k \in \{0,1\}, \forall k \in N \tag{2e}$$

$$O_i = \sum_{j \in N} w_{ij} \tag{2f}$$

$$D_i = \sum_{i \in N} w_{ij} \tag{2g}$$

As variáveis binárias $\boldsymbol{x_{ik}}$, definem se um vértice i será alocado a um *hub* k (sendo igual a 1 neste caso e igual a zero em caso contrário). $\boldsymbol{y_k}$ define se um *hub* será instalado ou não em k (sendo respectivamente igual a 1 ou 0).

A função objetivo 2a orienta a busca do mínimo custo total da rede – somando-se custos de transporte e custos fixos (instalação de terminais etc.). Cada restrição 2b assegura que cada vértice da rede esteja alocado a exatamente um nó *hub*, enquanto as restrições do tipo 2c garantem que os nós não sejam alocados a *hubs* que não venham a ser instalados. As restrições 2f e 2g definem os totais produzidos e atraídos por cada vértice da rede.

Campbell (1994) elaborou a primeira formulação "linear" do PL*H*-CF cuja ideia geral ainda vem sendo utilizada, apesar de já contar com aprimoramentos introduzidos por outros pesquisadores. Aquele autor apresentou formulações para os quatro casos básicos do PL*H*-CF – cada caso caracterizado por uma combinação das duas características fundamentais: capacidade (capacitado ou não-capacitado) e alocação (única ou múltipla), já detalhadas em 3.

A primeira destas formulações (apresentada a seguir) é a do PL*H*-CF Não-Capacitado e com Alocação Múltipla – conhecido na literatura científica como *UMAHLP* (*Uncapacitated Multiple Allocation Hub*

Location Problem).

$$Min\sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sum_{k\in N}\sum_{m\in N}C_{ijkm}\cdot x_{ijkm}+\sum_{k\in N}C_k\cdot y_k \tag{3a}$$

Sujeita a,

$$\sum_{k\in N}\sum_{m\in N}x_{ijkm}=1,\ \forall i\in N,\ \forall j\in N \tag{3b}$$

$$x_{ijkm}\leq y_k,\ \forall i\in N,\ \forall j\in N,\ \forall k\in N,\ \forall m\in N \tag{3c}$$

$$x_{ijkm}\leq y_m,\ \forall i\in N,\ \forall j\in N,\ \forall k\in N,\ \forall m\in N \tag{3d}$$

$$y_k\in\{0,1\},\ \forall k\in N \tag{3e}$$

$$0\leq x_{ijkm}\leq 1,\ \forall i\in N,\ \forall j\in N,\ \forall k\in N,\ \forall m\in N \tag{3f}$$

As variáveis são as mesmas apresentas em 4.1 e a função objetivo 3a orienta a busca do mínimo custo total da rede. As restrições do tipo 3b asseguram que todos os fluxos sejam realizados entre todos os pares de nós, enquanto as 3c e 3d garantem que os fluxos ocorram apenas por meio de *hub*s realmente instalados. É importante notar que a determinação do número total de terminais concentradores é endógena (explicado em 3).

Para se obter a formulação de Campbell (1994) da versão "*Capacitada*" do PL*H*-CF com Alocação Múltipla, basta adicionar à formulação 3a-3f a seguinte restrição:

$$\sum_{i\in N}\sum_{j\in N}w_{ij}\cdot\left[\sum_{m\in N}\left(x_{ijkm}+x_{ijmk}\right)-x_{ijkk}\right]\leq\Gamma_k\cdot y_k,\forall k\in N \tag{3g}$$

em que Γ_k é a capacidade máxima de um *hub* localizado no vértice *k*. Esta desigualdade garante que, caso haja um *hub* instalado em *k*, o somatório de todos os fluxos que passam por tal *hub* não excederá a sua capacidade Γ_k.

Por outro lado, caso se deseje manter o PL*H*-CF como Não-Capacitado porém alterar o tipo de alocação (transformando-o no tipo Alocação Única), são necessárias duas alterações na formulação 3a-3f: a substituição das restrições 3c e 3d pela restrição 3h e a inserção das restrições 3i e 3j (apresentadas a seguir). A variável binária z_{ik} determina se o vértice *i* está alocado ao *hub k* (sendo igual a 1 neste caso e zero em caso contrário).

$$z_{ik}\leq y_k,\ \forall i\in N,\ \forall k\in N \tag{3h}$$

$$\sum_{j\in N}\sum_{m\in N}\left(w_{ij}\cdot x_{ijkm}+w_{ji}\cdot x_{ijmk}\right)=\sum_{j\in N}\left(w_{ij}+w_{ji}\right)\cdot z_{ik},\quad \forall i\in N,\forall k\in N \tag{3i}$$

$$z_{ik}\in\{0,1\},\ \forall i\in N,\ \forall k\in N \tag{3j}$$

A restrição 3h garante que um vértice *i* somente pode ser alocado a um *hub* em *k* caso este último seja instalado. E a desigualdade 3i obriga que todos os fluxos que cheguem ou saiam de *i* o façam pelo *hub* em *k*, ao qual *i* está alocado.

Finalizando as formulações de Campbell (1994) para o PL*H*-CF, descreve-se aqui a modificação necessária para, a partir do terceiro caso exposto (PL*H*-CF "Não-Capacitado" e com Alocação Única), chegar ao PL*H*-CF "Capacitado" e com Alocação Única. Para tanto, basta que se adicione ao problema não-capacitado a restrição a seguir, a qual garante que, caso um vértice *i* esteja alocado a um *hub* instalado em *k*, o somatório de todos os fluxos que chegam e saem de *i* não excederá a capacidade daquele *hub*, Γ_k.

$$\sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\left(w_{ij}+w_{ji}\right)\cdot z_{ik}\leq\Gamma_k\cdot y_k,\forall k\in N \tag{3k}$$

4.3. Modificações propostas para as primeiras formulações

Tendo sido abordadas as formulações originais dos quatro casos principais do Problema de Localização de *Hubs* com Custos Fixos (PL*H*-CF), a partir deste ponto, o texto será dedicado ao estudo da evolução das formulações para os casos de alocação "múltipla" (definida no item 3), haja vista que os problemas práticos que motivaram esta pesquisa estão relacionados à localização de terminais intermodais que quase sempre têm o modo rodoviário como a alternativa principal (se não única) de distribuição e coleta de cargas para os *hubs*. E os operadores desta modalidade modelo trabalham com total liberdade e flexibilidade na escolha de suas rotas, de tal modo que a alocação única não retrataria com fidelidade a realidade destes sistemas.

Na alocação múltipla, por exemplo, um nó *i*, que envia cargas a dois nós distintos *j* e *l*, pode utilizar um par de *hubs km* como intermediário para o trajeto *ij* e outro par *pq* para o trajeto *il*. Já no caso de alocação simples, cada nó *i* da rede é cativo de um único terminal concentrador *k* (normalmente o que apresenta o menor custo de acesso ao mesmo). Vale também ressaltar que a alocação única não necessariamente minimiza os custos totais de uma rede em um problema de localização de *hubs*, mas a alocação múltipla sim.

Skorin-Kapov *et al.*. (1996), estudando o Problema de p-*Hub* Medianas, descobriram desigualdades mais fortes (*tighter*) que as restrições dos tipos 3c e 3d de Campbell (1994). Apesar de se tratar de um problema um pouco diferente do PL*H*-CF, as melhorias obtidas também são aplicáveis a este último. Assim, aqueles autores substituíram as referidas restrições (conforme Tabela 1), obtendo uma nova formulação mais apertada (restringida), com a vantagem de que esta modificação não implicou em um aumento do número de va-

Tabela 1. Substituições de restrições propostas por Skorin-Kapov, Hamacher *et al.*

Restrição	*Campbell (1994)*	*Skorin-Kapov et al. (1996)*	*Hamacher et al. (2004)*
3c	$x_{ijkm} \leq y_k$	$\sum_m x_{ijkm} \leq y_k$	$\sum_{m \in N} x_{ijkm} + \sum_{m \in N / m=k} x_{ijkm} \leq y_k$
3d	$x_{ijkm} \leq y_m$	$\sum_k x_{ijkm} \leq y_m$	

riáveis no problema, e ainda reduziu o número de restrições para ($2n^4 - 2n^3$).

Hamacher *et al.*. (2004), a partir de uma análise poliédrica do problema clássico de Localização de Facilidades (PLF) Não-Capacitado, descobriram facetas do espaço de solução do PL*H* Não-Capacitado e, também, as dimensões destas. O inverso também foi conseguido, isto é, determinaram facetas para o PLF a partir do estudo do Problema de Localização de *Hubs*. Esta inovação propiciou mais uma modificação nas restrições 3c e 3d, permitindo a fusão das mesmas em uma única (conforme Tabela 1) e tornando a formulação ainda mais apertada (*tighter*).

Marín *et al.*. (2006) criticam a formulação 3a-3f (mesmo alterada por Skorin-Kapov *et al.*., 1996). Afirmam que esta formulação "não" garante que uma rota (definida por quatro índices, *ijkm* – origem, *hub*1, *hub*2 e destino) possuirá no máximo dois *hubs* (limite usual nestes problemas). Eles desenvolveram uma nova formulação (para o PL*H*-CF Não-Capacitado e com Múltipla Alocação) composta de restrições do tipo facetas do poliedro de soluções do problema. Utilizaram, para isso, uma técnica criada por Padberg (1973) apud Marín *et al.*. (2006) baseada em restrições de cobertura de conjunto (*set packing constraints*), nas quais a soma de uma série de variáveis é menor ou igual a 1. Contaram também com o fato de o problema ser do tipo Não-Capacitado, onde as variáveis x_{ijkm} são binárias. Assim, obtiveram a formulação final 4a-4j.

$$Min \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} \sum_{m \in N} C_{ijkm} \cdot x_{ijkm} + \sum_{k \in N} C_k \cdot y_k \tag{4a}$$

Sujeita a,

$$\sum_{k \in N} \sum_{m \in N} x_{ijkm} = 1, \forall i \in N, \forall j \in N \tag{4b}$$

$$\sum_{\substack{k \in N \\ \wedge k \neq i}} \sum_{m \in N} x_{ijkm} + y_i \leq 1, \forall i \in N, \forall j \in N, i \neq j \tag{4c}$$

$$\sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ \wedge m \neq j}} x_{ijkm} + y_j \leq 1, \forall i \in N, \forall j \in N, i \neq j \tag{4d}$$

$$y_i + \sum_{\substack{(k,m) \in A \\ (k,m) \neq (i,j)}} x_{iikm} \leq 1, \forall i \in N \tag{4e}$$

$$x_{ijkk} + \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} x_{ijkm} + \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} x_{ijmk} \leq y_k, \forall i \in N, \forall j \in N, \forall k \in N \tag{4f}$$

$$x_{kkkm} = x_{kkmk} = 0, \forall k \in N, \forall m \in N, m \neq k \tag{4g}$$

$$x_{kjmk} = x_{jkkm} = 0, \forall k \in N, \forall m \in N, \forall j \in N, m \neq k \wedge j \neq k \tag{4h}$$

$$y_k \in \{0,1\}, \forall k \in N \tag{4i}$$

$$0 \leq x_{ijkm}, \forall i \in N, \forall j \in N, \forall k \in N, \forall m \in N \tag{4j}$$

Esta formulação apresenta somente ($n^3 + 3n^2 - n$) restrições (sendo n o número de vértices da rede), o que é bastante inferior à formulação original de Campbell (1994), mesmo melhorada por Skorin-Kapov *et al.*. (1996), que ainda possui ($2n^4 - 2n^3$) restrições.

Segundo Alumur e Kara (2008), com esta formulação 4a-4j, Marín *et al.*. (2006) generalizaram as formulações existentes do *PLH-CF Não-Capacitado e com Múltipla Alocação* e relaxaram a restrição de que a estrutura de custos da rede tenha que satisfazer a desigualdade triangular. Além disso, utilizando algumas técnicas de pré-processamento (descritas no item 3.5.5), eles produziram uma formulação mais forte (mais apertada, *tighter*) que superou em desempenho todas as anteriormente publicadas.

4.4. Outros tipos de formulações

As formulações apresentadas em 4.2 e 4.3 utilizam variáveis bi-indexadas ou tetra-indexadas para a definição do roteamento dos fluxos (por exemplo, x_{ij} ou x_{ijkm}). Existem também, embora em menor número, as formulações com variáveis de alocação tri-indexadas (x_{imj}) e outras com variáveis baseadas nos arcos da rede (ao invés dos vértices). Além disso, há outras formulações que introduzem importantes contribuições mas que, em termos de forma matemática, apresentam apenas pequenas modificações em relação às formulações descritas em 4.2 e 4.3. Esta seção aborda estes casos.

Ebery *et al.*. (2000) e Boland *et al.*. (2004) elaboraram formulações para o PL*H*-CF com Alocação Múltipla (tanto Capacitado quanto Não-Capacitado), utilizando variáveis tri-indexadas e obtiveram uma considerável redução do número de variáveis e restrições, chegando a respectivamente ($2n^3 + n$) e ($2n^2 + 2n$). Cabe ressaltar que o arcabouço matemático da maior parte desta inovação foi concebido em Ernst e Krishnamoorthy (1998).

Marín (2005) e Marín *et al.*. (2006) afirmam que esta referida formulação possui as vantagens do menor tamanho e do tempo de solução muito mais curto em relação às formulações tetra-indexadas (como as 4a-4j e anteriores), porém apresentam a desvantagem de os limites encontrados na relaxação linear serem mais folgados, isto é, piores. Marín *et al.*. (2006) destacam também que tal formulação falha quando a configuração da rede não satisfaz a desigualdade triangular, já que, neste caso, a formulação não garante que cada rota entre origem e destino possuirá no máximo dois *hubs* (limite usual nestes problemas) e, além disso, pode permitir que, em algumas rotas, certos vértices não-*hubs* sejam atravessados. Para resolver tais questões, Marin *et al.* (2006) propuseram a inclusão de outras restrições, conforme também o fizeram para as formulações tetra-indexadas do item 4.3.

Marín (2005) desenvolveu uma formulação tri-indexada específica para um PL*H*-CF-AM Capacitado que permite o particionamento de cada fluxo entre dois vértices (w_{ij}) em diversas rotas. Este problema foi denominado pelo autor como *Splittable Capacitated Multiple Allocation Hub Location Problem*.

Rodríguez-Martín e Salazar-González (2008) estudaram um problema de localização de *hubs* com custos fixos e capacitado; ao qual deram o nome *Capacitated Hub Location Problem* (*CHLP*), cuja formulação também é bastante diferente das formulações tetra, tri e bi-indexadas referidas, já que estas últimas se baseiam nas quantidades de fluxos em cada "rota" (representadas por variáveis do tipo x_{ijkm}) enquanto a dos referidos autores se baseia apenas nas quantidades de fluxos em cada "arco" da rede (representadas por variáveis do tipo x_a).

Yang (2009) apresenta uma importante contribuição para modelar com maior precisão os PL*H*-CF-MA nos casos em que a demanda de transporte é caracterizada por considerável variação sazonal, como no transporte aéreo. Assim, embora a formulação esteja baseada nas já referidas variáveis tetra-indexadas, ela se diferencia por constituir uma programação estocástica e multi-estágio.

Alumur *et al.*. (2009) propuseram a mudança de um paradigma dos modelos de localização de *hubs* em redes, onde sempre se considerava que, tendo sido instalado dois novos *hubs* em uma rede, uma via de ligação entre os mesmos também obrigatoriamente estaria instalada (ver Figura 1). Portanto Alumur *et al.*. (2009) incluíram, em cada função objetivo de problema estudado, o custo de instalação desta via.

Camargo *et al.*. (2009) modificaram a formulação para o PL*H*-CF-MA Não-Capacitado proposta por Hamacher *et al.*. (2004, referida no item 4.3). Tal modificação tornou possível considerar no referido problema os custos de congestionamento de fluxos em cada *hub*.

Correia *et al.*. (2010) elaboraram uma extensão do Problema de Localização de *Hubs* Capacitado e com Alocação Única em que a principal inovação é o fato de o limite de capacidade de cada *hub* ser também uma incógnita do problema.

Ishfaq e Sox (2010) apresentaram um modelo do problema de p-*hub* medianas "com custos fixos" bastante rico em detalhes para o emprego no transporte intermodal. Como a única diferença deste problema para o PL*H*-CF é a restrição que determina o número exato de *hubs* a ser instalado, vale a pena tratar deste caso também pela sua grande contribuição para as redes intermodais. A formulação permite uma modelagem mais precisa, robusta e melhor que as formulações existentes para o caso da aplicação em redes logísticas intermodais. Apresenta parâmetros e variáveis bastante detalhados de modo a considerar diferentes tipos de rotas (diretas, via *hubs* com alocação múltipla e via *hubs* com alocação única), diferentes modos de transporte (rodoviário, ferroviário e aéreo), custos fixos (incomuns nos p-*hubs* medianas), custos de transbordo intermodal, economia-de-escala não linear e restrições de tempo de serviço. Com tantos detalhes, alguns tipos de variáveis chegam a possuir cinco índices.

5. MODELOS DE SOLUÇÃO

Nesta seção apresentam-se, sucintamente, os métodos mais eficientes encontrados na literatura científica e destinados à solução do Problema de Localização de *Hubs* com Custos Fixos. Procurou-se esgotar o assunto para o caso de alocação múltipla, mas não para o de alocação única (conforme justificado em 4.3), embora estejam descritos também modelos de solução do PL*H*-CF de Alocação Única.

No início das pesquisas, era nítida a preferência por heurísticas, o que se deve provavelmente à alta complexidade do problema (NP-Completo) e à existência de pouco conhecimento sobre o mesmo na época. Atualmente, conforme mostra Camargo *et al.*. (2008), a pesquisa por métodos exatos é mais frequente e tem base no argumento destes autores de que o planejamento e projeto de redes *hub-and-spoke* cria decisões sobre a aplicação de grandes quantidades de recursos, as quais têm considerável impacto nos custos totais destas redes. O que justifica o gasto de algumas horas quando se trata de obter a solução ótima para um problema de localização de *hubs*.

O'Kelly (1992), o primeiro artigo sobre o problema "com custos fixos", apresenta um procedimento composto por três passos principais: uma rotina para determinação de um limite superior (uma solução viável não necessariamente ótima), um segundo procedimento para cálculo de um limite inferior justo e um passo final de melhoria do limite superior com base no inferior.

Aykin (1994), para o PL*H*-CF-AM Capacitado, criou uma heurística e um algoritmo de *branch-and-bound* e, a partir destes, obteve os limites inferiores por relaxação lagrangeana com otimização de subgradientes. Aykin (1995), para o PL*H*-CF-AM Não-Capacitado, também utilizou um algoritmo de *branch-and-bound* e o combinou com uma heurística gulosa baseada na meta-heurística *Simulated Annealing*.

Klincewicz (1996) propôs um modelo baseado no Método Dual Ascendente que pode ser entendido como uma analogia (para *hubs*) do algoritmo de Erlenkotter (1978). Klincewicz compôs seu método em três partes: um algoritmo dual ascendente, um ajuste dual e um algoritmo de *branch-and-bound*. O artigo apresenta resultados de testes computacionais com redes de até 25 vértices, que chegaram a soluções ótimas ou próximas delas (95%).

Mayer e Wagner (2002) desenvolveram importantes modificações para a metodologia de Klincewicz (1996) e apresentaram um artigo mais elucidativo que o original. O algoritmo modificado também apresentou desempenho bastante superior ao de Klincewicz. Entretanto, ao compararem o HubLocator com o pacote comercial CPLEX, não foi possível confirmar a superioridade de algum dos dois.

Sung e Jin (2001) também utilizaram o Método Dual Ascendente para resolver um problema de localização de *hub* não-capacitado com a particularidade de que a rede deveria ser dividida em *clusters* (conjuntos fechados de vértices) e que houvesse exatamente um *hub* em cada *cluster*. Sendo assim, o problema, por natureza, já toma a forma de Alocação Única. Outro detalhe importante é que eles consideraram a possibilidade de ocorrer fluxos diretos entre origem e destino sem passar por *hubs*. Este método de Sung e Jin (2001) é composto por um procedimento dual ascendente e outro de ajustamento dual.

Cánovas *et al.*. (2007) também criaram uma heurística baseada no Método Dual Ascendente e propuseram um algoritmo original para resolver o PL*H*-CF-AM Não-Capacitado. Antes das iterações do algoritmo base, é realizado um pré-processamento que, segundo os autores, melhora bastante a eficiência do método. O algoritmo que coordena todas as funções é do tipo *branch-and-bound* e, em cada nó desta enumeração implícita, uma rotina heurística dual ascendente é executada como a ferramenta fundamental do processo. Uma observação interessante dos autores é que as instâncias de problemas mais difíceis são aquelas em que há simetria nos custos de transporte e baixos valores de α (coeficiente de desconto para custos *interhub*).

É importante destacar que, até o momento, entre todos os métodos publicados, este método de Cánovas *et al.*. (2007) é o segundo com o melhor desempenho computacional para o PL*H*-CF-AM, resolvendo instâncias de até 120 vértices em cerca de 4.700 segundos para problemas assimétricos e 20.600 segundos para casos simétricos. O método que o supera em eficácia é o de Camargo *et al.*. (2008), que será descrito adiante.

Aqui, o texto volta à ordem cronológica das publicações, que foi interrompida porque os três últimos artigos comentados têm relação direta de tema com o de Klincewicz (1996, Método Dual Ascendente).

Ernst e Krishnamoorthy (1999) resolveram um modelo do PL*H*-CF Capacitado e com Alocação Única. Eles propuseram um método gerenciado por um algoritmo de *branch-and-bound* que utiliza a relaxação linear como base das iterações e uma combinação das meta-heurísticas *Simulated Annealing* e *Random Descent* para obter limites superiores e buscar a solução de forma mais rápida. Os autores também criaram três técnicas específicas de pré-processamento da formulação.

Ebery *et al.*. (2000), para a solução do PL*H*-CF-AM Capacitado, criaram uma heurística que utiliza um eficiente algoritmo (baseado na técnica do caminho mais curto – *Shortest Path*) de Ernst e Krishnamoorthy (1998) para gerar soluções iniciais. Como tal algoritmo foi desenvolvido para problemas não-capacitados, ele acaba gerando soluções que não atendem às restrições de capacidade do problema de Ebery *et al.*. (2000). Assim, estes últimos autores incluíram uma rotina para, a cada solução inicial, redistribuir os fluxos que estiverem violando restrições de capacidade. Então, havendo uma solução inicial válida, é aplicada uma rotina gulosa de busca na vizinhança desta solução para encontrar melhoras, isto é, uma rotina tenta iterativamente trocar a localização de algum *hub* da solução corrente, verificando a melhora da função objetivo. Em caso de melhora, a nova solução encontrada passa a ser a inicial e uma nova iteração é processada, até que se atinja algum critério de parada.

Wagner, B. (2007) estudou o mesmo problema de Sung e Jin (2001) – o Problema de Localização de *Hubs* Não-Capacitado com *Clusters* (consequentemente, de Alocação Única). O método exato que propôs superou em desempenho a heurística dual ascendente de Sung e Jin, não somente no aspecto de produzir soluções exatas mas principalmente por utilizar um tempo de processamento significativamente menor.

Camargo *et al*. (2008) criaram o algoritmo que, atualmente, apresenta o melhor desempenho na solução "exata" do PL*H*-CF-AM Não-Capacitado. O procedimento é baseado na clássica Decomposição de Benders e é capaz de resolver instâncias de até 200 vértices em menos de 10.000 segundos de processamento. Os autores também avaliaram mais duas versões do algoritmo de Benders (não elaboradas pelo próprio Benders). Os resultados indicaram que o procedimento clássico superou os demais, especialmente nas instâncias de maior porte.

Outro algoritmo baseado no Método de Decomposição de Benders foi proposto em Camargo *et al.* (2009) para a solução do PL*H*-CF-AM Não-Capacitado sob Congestionamento (problema descrito em 4.4). Embora o problema seja uma complexa variante não-linear do PL*H*-CF-AM, o algoritmo resolveu instâncias de até 81 vértices e mostrou desempenho superior ao de um software líder comercial em programação inteira não-linear.

Rodríguez-Martín e Salazar-González (2008) testaram quatro métodos distintos para resolver o *Capacitated Hub Location Problem* (*CHLP*), tendo encontrado melhor desempenho em uma heurística baseada na combinação da meta-heurística *VNS* (*Variable Neighborhood Search*) com a relaxação linear do problema (que foi capaz de tratar instâncias grandes e fora do alcance dos três métodos anteriores, apesar de nem sempre atingir a solução ótima).

Três trabalhos bastante recentes publicaram métodos de solução para o PL*H*-CF com Alocação "Única". Silva e Cunha (2009) apresentam modelos de solução para o caso não-capacitado deste problema. Três dos modelos se baseiam na heurística Busca-Tabu Multistart, enquanto o quarto é baseado na Busca-Tabu Integrada de dois estágios. Tratam-se de métodos simples com facilidade de implementação e ao mesmo tempo robustos na qualidade das soluções encontradas segundo afirmam os autores quando reportam seus experimentos com alguns conjuntos de dados internacionalmente conhecidos.

O segundo dos três trabalhos aborda o caso "capacitado" do PL*H*-CF com Alocação Única. Randall (2008) desenvolveu quatro modelos de solução baseado numa heurística do tipo Colônia de Formigas com eficientes estratégias de busca local e pré-processamento. O referido autor afirmou ter encontrado resultados de qualidade também com um dos conjuntos de dados utilizados por Silva e Cunha (2009).

Contreras *et al.* (2009) – no terceiro dos referidos três trabalhos – elaboraram também para o caso capacitado um método em que a técnica de Relaxação Lagrangeana é especificamente direcionada para a estrutura do problema em questão, decompondo-o em problemas menores e gerando um intervalo de dualidade (entre os limites superior e inferior da solução) que posteriormente é bastante diminuído por uma heurística específica baseada em testes de redução. Tal que os intervalos finais de dualidade de todas as instâncias testadas pelos autores não superaram 3,4%.

6. MODELAGEM DA ECONOMIA DE ESCALA

Desde que não haja congestionamentos significativos na rede, quanto maior for a quantidade de fluxos num determinado arco da rede, menor tende a ser o custo unitário de transporte neste arco. Este conceito de economia vem sendo aplicado na modelagem de redes com terminais concentradores, por meio da inclusão de fatores de desconto nos custos de transporte de cada arco (conforme a equação 1).

A maioria dos trabalhos sobre PL*H* existentes considera estes fatores de desconto como constantes do tipo $0 \leq \alpha \leq 1$. Contudo algumas pesquisas já melhoraram tal modelagem, aproximando mais este fator da realidade, pois o consideram uma função da quantidade de fluxo.

O'Kelly e Bryan (1998), modelando o PL*H*-CF-AM, propuseram, para o cálculo do custo de transporte em um arco *km*, uma função não-linear côncava (semelhante à CT^{NL}_{km} da Figura 2), que aumenta o valor do custo a uma taxa decrescente à medida que os fluxos crescem. As demais funções da Figura (CT^{SE}_{km} e CT^{L}_{km}) representam respectivamente o referido custo total sem economia de escala e com economia aplicada por um fator α constante (referido anteriormente). Horner e O'Kelly (2001) também propuseram outra função de custo não-linear.

Racunica e Wynter (2005) apresentaram outro modelo para o PL*H*-CF-AM Não-Capacitado no transporte intermodal de cargas, onde utilizaram uma função de custo não-linear côncava nos trechos *interhubs* e nas ligações entre *hub* e destino (excetuando apenas as ligações entre origem e *hub*). Essa função é a CT^{NL}_{km} da Figura 2. Assim, para resolver o problema de forma linear, eles fizeram uma aproximação de cada função côncava por meio de diversas funções lineares e identificaram algumas propriedades poliédricas do modelo linearizado. Então desenvolveram duas heurísticas de redução de variáveis para a solução do problema e apresentaram um estudo de caso sobre uma rede europeia transalpina de transporte de cargas.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi realizada, na literatura científica sobre Otimização Combinatória e Programação Matemática, uma revisão bibliográfica sobre os modelos de localização de terminais concentradores (*hubs*). Esta pesquisa foi direcionada para o objetivo de aplicar a referida teoria em projetos de instalação de terminais intermodais de

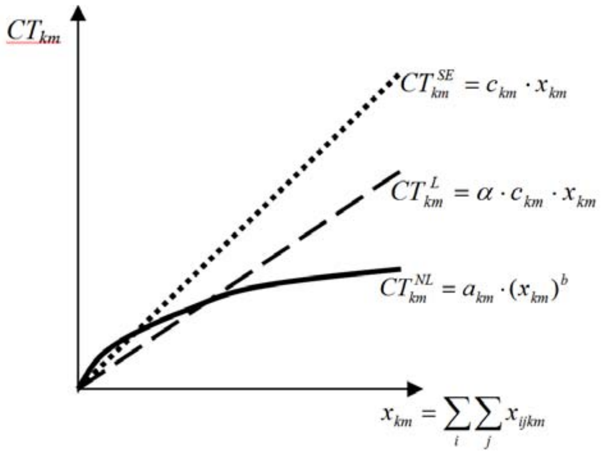

Figura 2. Tipos de economias de escala

transporte do Brasil, contribuindo pró-ativamente para a demanda de planejamentos e estudos de viabilidade a serem provavelmente requeridos após a recente publicação do Decreto 6620 da Presidência da República, que passa a vigorar já num cenário de incentivo governamental para utilização do transporte intermodal no País.

A pesquisa abordou principalmente a classificação dos tipos de métodos, seus modelos de formulação matemática e as técnicas de solução dos mesmos; tendo mostrado a diversidade de soluções para problemas desta natureza, bem como a existência também de bastante oportunidade de adicional desenvolvimento nesta área (pouco explorada em relação à teoria clássica de Localização de Facilidades). O trabalho também leva à conclusão de que os métodos estudados são muito adequados ao planejamento dos sistemas de transportes objeto do estudo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alumur, S. e B. Y. Kara (2008) Network hub location problems: the state of the art. *European Journal of Operational Research*, v. 190, n. 1, p. 1-21.

Alumur, S. e B. Y. Kara e O. E. Karasan (2009) The design of single allocation incomplete hub networks. *Transportation Research B*, v. 43, n. 10, p. 936-951.

ANTAQ (2010) Agência Nacional de Transportes Aquaviários / PGO. Disponível em: <http://www.antaq.gov.br/Portal/pgo.asp >. Acessado em: 18 abr. 2010, 22:20:47.

ANTF (2010) Informações do Setor / Números. Disponível em: < http://www.antf.org.br/>. Acessado em: 18 abr. 2010, 22:25:14.

Aykin, T. (1994) Lagrangean relaxation based approaches to capacitated hub-and-spoke network design problem. *European Journal of Operational Research*, v. 79, n. 3, p. 501-523.

Aykin, T. (1995) Networking policies for hub-and-spoke systems with application to the air transportation system. *Transportation Science*, v. 29, n. 3, p. 201-221.

Boland, N. e Krishnamoorthy, M. e Ernst, A. T. e Ebery, J. (2004) Preprocessing and cutting for multiple allocation hub location problems. *European Journal of Operational Research*, v. 155, n. 3, p. 638-653.

Camargo, R. S. e G. Miranda Jr. e H. P. Luna (2008) Benders decomposition for the uncapacitated multiple allocation hub location problem. *Computers & OR*, v. 35, n. 4, p. 1047-1064.

Camargo, R. S. e G. Miranda Jr. e R. P. M. Ferreira e H. P. Luna (2009) Multiple allocation hub-and-spoke network design under hub congestion. *Computers & OR*, v. 36, n. 12, p. 3097-3106.

Campbell, J. F. (1994) Integer programing formulations of discrete hub location problems. *European Journal of Operational Research*, v. 72, n. 2, p. 387-405.

Cánovas, L. e S. E. García e A. Marín (2007) Solving the Uncapacitated Multiple Allocation Hub Location Problem by means of a dual-ascent technique. *European Journal of Operational Research*, v. 179, n. 3, p. 990-1007.

Contreras, I. e J. A. Díaz e E. Fernández (2009) Lagrangean relaxation for the capacitated hub location problem with single assignment. *OR Spectrum*, v. 31, n. 4, p. 483-505.

Correia, I. e S. Nickel e F. Saldanha-da-Gama (2010) Single-assignment hub location problems with multiple capacity levels. *Transportation Research Part B*, doi:10.1016/j.trb.2009.12.016.

Ebery, J. e M. Krishnamoorthy e A. T. Ernst e N. Boland (2000) The capacitated multiple allocation hub location problem: formulations and algorithms. *European Journal of Operational Research*, v. 120, n. 3, p. 614-631.

Erlenkotter, D. (1978) A dual-based procedure for Uncapacitated Facility Location. *Operations Research*, v. 26, n. 6, p. 992-998.

Ernst, A. T. e M. Krishnamoorthy (1998) Exact and heuristic algorithms for the uncapacitated multiple allocation p-hub median problem. *European Journal of Operational Research*, v. 104, n. 1, p. 100-112.

Ernst, A. T. e M. Krishnamoorthy (1999) Solution algorithms for the capacitated single allocation hub location problem. *Annals of Operations Research*, v. 86, n. 1, p. 141-159.

Goldman, A. J. (1969) Optimal Locations for Centers in a Network. *Transportation Science*, v. 3, n. 4, p. 352-360.

Hamacher, H. W. e M. Labbé e S. Nickel e T. Sonneborn (2004) Adapting polyhedral properties from facility to hub location problems. *Discrete Applied Mathematics*, v. 145, n. 1, p. 104-116.

Horner, M. W. e M. E. O'Kelly (2001) Embedding economies of scale concepts for hub network design. *Journal of Transport Geography*, v. 9, n. 4, p. 255-265.

Ishfaq, R. e C. R. Sox (2010) Intermodal logistics: The interplay of financial, operational and service issues. *Transport. Res. Part E*, doi:10.1016/j.tre.2010.02.003.

Kara, B. Y. e B. C. Tansel (2000) On the single-assignment p-hub center problem. *European Journal of Operational Research*, v. 125, n. 3, p. 648-655.

Kara, B. Y. e B. C. Tansel (2003) The single-assignment hub covering problem: Models and linearizations. *Journal of the Operational Research Society*, v. 54, n. 1, p. 59-64.

Klincewicz, J. G. (1996) A dual algorithm for the Uncapacitated Hub Location Problem. *Location Science*, v. 4, n. 3, p. 173-184.

Marín, A. (2005) Formulating and solving Capacitated Multiple Allocation Hub Location Problem. *Computers & OR*, v. 32, n. 12, p. 3093–3109.

Marín, A. e L. Cánovas e M. Landete (2006) New formulations for the uncapacitated multiple allocation hub location problem. *European Journal of Operational Research*, v. 172, n. 1, p. 274–292.

Mayer, G. e B. Wagner (2002) Hub Locator: An exact solution method for the Multiple Allocation Hub Location Problem. *Computers & Operations Research*, v. 29, n. 6, p. 715–739.

O'Kelly, M. E. (1987) A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities. *European Journal of Operational Research*, v. 32, n. 3, p. 393–404.

O'Kelly, M. E. (1992) Hub facility location with fixed costs. *Papers in Regional Science*, v. 71, n. 3, p. 293-306.

O'Kelly, M. E. e D. Bryan e D. Skorin-Kapov e J. Skorin-Kapov (1996) Hub network design with single and multiple allocation: A Computational study. *Location Science*, v. 4, n. 3, p. 125-138.

O'Kelly, M. E. e D. Bryan (1998) Hub location with flow economies of scale. *Transportation Research B*, v. 32, n. 8, p. 605-616.

Padberg, M. W. (1973) On the facial structure of set packing polyhedra. *Mathematical Programming*, v. 5, p. 199-215 apud Marín, A. e L. Cánovas e M. Landete (2006) New formulations for the uncapacitated multiple allocation hub location problem. *European Journal of Operational Research*, v. 172, n. 1, p. 274-292.

Racunica, I. e L. Wynter (2005) Optimal location of intermodal freight hubs. *Transportation Research Part B*, v. 39, n. 5, p. 453-477.

Randall, M. (2008) Solution approaches for the capacitated single allocation hub location problem using ant colony optimization. *Computational Optimization and Applications*, v. 39, n. 2, p. 239–261.

Rodríguez-Martín, I. e J. J. Salazar-González (2008) Solving a capacitated hub location problem. *European Journal of Operational Research*, v. 184, n. 2, p. 468-479.

Silva, M. R. e C. B. Cunha (2009) New simple and efficient heuristics for the uncapacitated single allocation hub location problem. *Computers & Operations Research*, v.36, n. 12, p. 3152-3165.
Skorin-Kapov, D. e J. Skorin-Kapov e M. E. O'Kelly (1996) Tight linear programming relaxations of uncapacitated p-hub median problem. *European Journal of Operational Research*, v. 94, n. 3, p. 582-593.
Sung, C. S. e H. W. Jin (2001) Dual-based approach for a hub network design problem under non-restrictive policy. *European Journal of Operational Research*, v. 132, n. 1, p. 88-105.
Wagner, B. (2007) An exact solution procedure for a cluster hub location problem. *European Journal of Operational Research*, v. 178, n. 2, p. 391-401.
Yang, T.-H. (2009) Stochastic air freight hub location and flight routes planning. *Applied Mathematical Modelling*, v. 33, n. 12, p. 4424-4430.