

# INTRODUÇÃO AOS MODELOS DE PARTICIPAÇÃO DE MERCADO EM SERVIÇOS DE TRANSPORTES

Antonio Galvão Novaes

Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

## RESUMO

Análises de participação de mercado ("market share") são comuns em estudos na área de "marketing", envolvendo produtos e respectivas marcas, de um lado, o perfil da demanda de outro, e o posicionamento das empresas produtoras que competem nesse mercado, num terceiro bloco. No setor de transportes a literatura registra aplicações em ligações aéreas e em serviços intermunicipais de ônibus.

Os modelos de participação de mercado se aplicam normalmente a situações em que os operadores oferecem serviços de transportes similares num determinado mercado, com a competição sendo feita não com base em atributos modais intrínsecos, mas sim apoiada em características diferenciadoras intra-modais mais tênues, tais como conforto, atendimento, promoções tarifárias, "marketing" e propaganda, etc.

Neste artigo é feita uma introdução aos modelos de "market share" em transportes, com a apresentação de um exemplo de aplicação ao transporte intermunicipal de passageiros em ônibus, sendo discutidos também aspectos ligados à calibração e ao uso de tais modelos.

## ABSTRACT

Market share analysis is common in marketing studies involving products and respective brands, on one hand, the demand profile on the other hand, and the competing industries on a third set. In the transport sector the literature registers a number of applications to air transport problems and to intercity bus services.

Market share models are normally applied to situations in which operators offer, in a specific market, transport services that are similar in nature, with competition based not on intrinsic modal attributes, but rather on more tenous intra-mode differentiating characteristics, such as comfort, attendance, tariff promotions, marketing and advertising efforts, etc (sub-modal configurations).

It is presented in this paper an introduction to market share modelling in transport, with an example concerning an intercity bus service in Brazil. Aspects related to the calibration and practical use of such models are also discussed in the text.

---

## 1. Introdução

Os modelos clássicos de divisão modal procuram explicar o processo de escolha do usuário em função de uma série de atributos dos modos alternativos disponíveis. Há, no entanto, um segundo nível de análise da demanda, que é feito especificamente para um dos subsistemas modais, e que considera diferenças mais sutis no nível de serviço. Usualmente esse tipo de análise pressupõe a atuação de duas ou mais empresas que competem dentro do mesmo mercado, para isso ajustando individualmente os valores das variáveis de serviço, tais como tarifas, tempos, frequências, conforto, etc. Esse tipo de enfoque, comum em *marketing* de produtos e de serviços, é denominado de *análise de participação de mercado*, ou "market-share analysis" em Inglês (Mazzon et al, 1983, Cooper et al, 1988). Williams (1993) denomina de "sub-modal" esse segundo nível de análise, em contraste com os modelos clássicos de divisão modal.

Suponhamos, por exemplo, um determinado segmento do mercado de transporte aéreo de passageiros, digamos a ligação São Paulo-Brasília. Normalmente as preferências de horário para viajar são explicadas pôr fatores exógenos a

esse tipo de análise: compromissos assumidos, tempo de permanência no destino, motivo da viagem, etc. Por essa razão é comum se adotar um perfil de variação da demanda ao longo do dia, perfil esse determinado exogenamente através de dados estatísticos disponíveis. Aliás, tal situação também ocorre nos estudos clássicos de transportes, quando uma curva de variação horária da demanda é adotada como dado básico da análise. Há, no entanto, outros fatores que influem decisivamente na escolha da empresa aérea e, mais especificamente do voo, por parte do passageiro: imagem da empresa, duração da viagem (incluindo número de escalas intermediárias), tipo de aeronave, condições internas de conforto e de serviço (espaçamento entre fileiras de assento, serviço de bordo, entretenimento) e, obviamente, os aspectos pecuniários (tarifa, descontos, facilidades de pagamento). A empresa norte-americana Boeing (The Boeing Co, 1982) desenvolveu um modelo de participação de mercado aéreo de passageiros, calibrando-o empiricamente sobre dados de empresas de aviação do mundo todo. A estrutura desse modelo foi

utilizada pelo autor em estudos de transporte aéreo para uma empresa nacional, com resultados bastante satisfatórios.

As possibilidades de aplicação de modelos de participação de mercado em estudos de transportes, no Brasil, são bastante promissoras, principalmente agora em que há uma certa mobilização da sociedade no sentido de imprimir maior competitividade aos serviços públicos de uma forma geral. A regulamentação exagerada dos serviços de transporte de passageiros, vigente por muitos anos no País, fez com que as empresas não se preocupassem efetivamente com a competição de suas congêneres. No caso do transporte aéreo, o setor já foi liberado razoavelmente nos últimos anos. Não é o que ocorre, no entanto, com os serviços intermunicipais, interestaduais e internacionais de transporte de passageiros em ônibus. Muito foi prometido em termos de liberação do mercado, mas quase nada foi realizado até agora. O Decreto Federal número 952, de 7/10/93, que trata desse assunto, não passa de um pífio paliativo sem maiores consequências práticas.

Neste texto faremos uma análise introdutória do problema,

discutindo alguns aspectos conceituais básicos, mostrando algumas formas de ajuste dos modelos, e apresentando uma aplicação típica ao setor de transportes.

## 2. Aspectos Conceituais

O conceito de *mercado* de um certo produto ou serviço é um tanto flexível. Idealmente um mercado é um conjunto de pessoas (ou instituições) que são consumidores potenciais de um certo produto ou serviço. Aqueles que nunca compraram o produto ou serviço estariam incluídos no mercado desde que estivessem propensos a aderir, adquirindo o produto ou serviço em pauta num futuro próximo. Se definirmos *mercado* dessa forma, então a *participação de mercado* ("market share") corresponderá ao rateio de seus consumidores potenciais pelas empresas que oferecem tal produto ou serviço. Tal definição de mercado, no entanto, é muito ampla e um tanto vaga. Na prática, não se trabalha com consumidores potenciais, mas sim com consumidores efetivos, isto é, parte-se das vendas efetivamente realizadas (expressas em unidades vendidas ou em receita). Assim, os objetivos da *análise de partição de mercado* são: (a) definir a partici-

pação porcentual de cada concorrente nas vendas totais do produto ou serviço; (b) analisar as tendências de evolução e as implicações econômico-financeiras para, pelo menos, um dos concorrentes.

Se considerarmos a participação de uma empresa num certo mercado, participação essa expressa em porcentagem de unidades vendidas ou em porcentagem de faturamento, será possível concluir alguma coisa em relação à solidez dessa empresa nesse mercado? Ou seja, uma empresa com grande participação no mercado estaria melhor do que outra que apresenta pequena participação? Há um certo consenso entre os autores de que existe, de fato, uma correlação positiva entre a lucratividade e a participação no mercado para a maioria das atividades empresariais (Buzzell *et al*, 1975; Branch, 1980).

A primeira explicação causal para a correlação entre "market share" e lucratividade se apoia na chamada *curva de aprendizado* ("learning curve"), como também nas *economias de escala*. As atividades da empresa tendem a ser executadas mais eficientemente, por meio de métodos e procedimentos mais aperfeiçoados, à medida que aumenta sua produção. A própria

repetição sucessiva da mesma atividade fornece elementos para melhoria de sua execução, tão sómente pela observação e correção de rumo. Como consequência, o custo unitário tende a cair quando o volume aumenta. Esse efeito está ligado geralmente a uma curva decrescente, denominada *curva de aprendizado*. Por outro lado, empresas com maior participação no mercado têm seus custos fixos, tais como investimentos em infraestrutura e em equipamentos, despesas com propaganda, custos de administração, etc, diluídos entre um maior volume de produtos, reduzindo assim os custos unitários (Jacobson *et al*, 1985). Tais ganhos são considerados *economias de escala*.

A segunda explicação causal é o poder crescente que a maior participação no mercado traz à maioria dos negócios. Esse poder não pode ser confundido com as vantagens de custo obtidas através da experiência ("learning curve") ou através dos efeitos de escala. Por exemplo, concessões mais favoráveis podem ser obtidas de fornecedores, de agentes do governo, de intermediários, etc, por empresas com maior "market share", simplesmente em função do volume

envolvido e de sua importância estratégica. Mas, conforme Jacobson *et al* (1985), essa explicação para a interrelação positiva entre "market share" e produtividade pode ser espúria porque ambos componentes ("market share" e produtividade) podem estar influenciados simultaneamente por outros fatores. Por exemplo, uma administração de qualidade superior pode gerar uma maior quantidade de produtos atraentes, com menores preços, programas de "marketing" mais eficazes, etc, levando simultaneamente a uma maior participação no mercado e a melhores índices de lucratividade.

A terceira explicação causal, levantada por Boulding *et al* (1990), diz respeito às condições ambientais dentro das quais as firmas atuam. As empresas suscetíveis de lucrar mais através de um aumento na sua participação no mercado ("market share") são normalmente aquelas que operam em ambientes propícios, isto é, mostram uma combinação parcial ou total de quatro características básicas (Porter, 1980): (a) poder sobre compradores, (b) poder sobre fornecedores, (c) ausência de competidores rivais e (d) ausência de ameaça de invasão por parte de novos concorrentes. Tais empresas muito

provavelmente podem aumentar seu volume de vendas sem uma correspondente redução na margem de lucro. Embora a maior participação no mercado não traga maior poder *per se*, há evidências de que empresas operando em ambientes propícios obtêm, de fato, benefícios reais quando aumentam seu "market share". Conforme Boulding *et al* (1990), o ponto chave ao estabelecer a estratégia para a empresa não é um aumento de "market share" por si só, mas sim como aumentá-lo de forma a obter maior nível de vendas, mas mantendo, ao mesmo tempo, os resultados econômicos planejados.

O preço é talvez o instrumento de "marketing" mais utilizado pelos executivos. De fato, as mudanças de preço, ao contrário das alterações no produto, na propaganda e nos serviços complementares, são as que podem ser efetivadas mais rapidamente. O efeito resultante de uma alteração no preço também se manifesta rapidamente, enquanto outras medidas levam tempo para afetar o nível de vendas. Em função disso reduções, expressivas de preço são comuns quando uma empresa procura dominar um mercado. No entanto, os competi-

dores tendem a reagir de forma igualmente rápida, e uma guerra de preços pode ser deflagrada rapidamente. O preço é, assim, uma arma bastante eficaz no esquema competitivo empresarial, mas muito perigosa (Simon, 1992). Por essa razão, em muitos países o governo procura regulamentar rigidamente os serviços de transportes. Pretende-se evitar, assim, que as empresas do setor se dilacerem num processo ruinoso de competição, prejudicando, em última instância, a população. No Brasil, essa política de regulamentação levada a extremos conduziu a uma oligopolização dos diversos serviços de transportes, com consequências também negativas e de difícil eliminação.

### 3. Tipos de Modelo de Participação de Mercado

O tratamento do problema através da modelagem matemática requer uma formalização conceitual de "market share". Um teorema básico, devido a Bell, Keeney e Little (1975), fornece os princípios para essa formalização. Vamos considerar uma situação onde, ao adquirir um certo produto, os consumidores tenham que escolher uma marca dentre um conjunto de alternativas disponíveis no mercado. Um axioma

básico é definido pelos autores mencionados: o único fator determinante no estabelecimento do nível de "market share" é a *atração* que os consumidores sentem em relação a cada uma das marcas alternativas. Além disso, admitem as seguintes propriedades para a atração, onde  $A_i$  é a atração da marca  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) e  $s_i$  é o correspondente nível de participação no mercado ("market share"):

Axioma 1:  $A_i \geq 0$  para todo  $i$ , e  $\sum_{i=1}^m A_i > 0$ , ou seja, as atrações são sempre não negativas e sua soma é sempre positiva;

Axioma 2:  $A_i = 0$  implica em  $s_i = 0$ .

Axioma 3:  $A_i = A_j$  implica em  $s_i = s_j$  ( $i \neq j$ ), ou seja, igual atração implica em igual nível de "market share";

Axioma 4: Quando alteramos  $A_j$  de um valor  $\Delta_j$ , as alterações correspondentes em  $s_1, s_2, \dots, s_i$  ( $i \neq j$ ) são iguais, isto é, há um efeito simetricamente distribuído sobre os níveis de "market share" das alternativas competidoras.

Partindo desses quatro axiomas Bell, Keeney e Little (1975) mostraram que a seguinte

relação entre atrações e "market shares" pode ser deduzida:

$$s_i = \frac{A_i}{\sum_{j=1}^m A_j} \quad (1)$$

Se adicionarmos mais a condição de que as alternativas sejam eventos discretos, exaustivos, então o conjunto de axiomas satisfaz também as propriedades de probabilidade num espaço amostral finito. Nesse caso as frações  $s_i$  ( $i=1,2 \dots$ ) correspondentes às participações de mercado, podem ser entendidas como probabilidades.

Deve-se notar que a formulação acima, denominada genericamente de *modelos de atração* na literatura, não é a única adotada nos estudos quantitativos de "market share". Há casos de aplicação em que o modelo de "market share" é expresso diretamente por uma função linear ou multiplicativa, dos seguintes tipos (Cooper et al, 1988; Brodie et al, 1984):

Linear:

$$s_i = \beta_{0i} + \sum_{k=1}^K \beta_k \cdot X_{ki} + \delta_i \quad (2)$$

Multiplicativa:

$$s_i = \exp(\beta_{0i}) \cdot \prod_{k=1}^K X_{ki}^{\beta_k} \cdot \delta_i \quad (3)$$

onde  $X_{ki}$  representa o valor do atributo  $k$  da alternativa  $i$ ;  $\beta_{0i}$  é uma constante ligada à alternativa  $i$ ;  $\beta_k$  é o coeficiente do atributo  $k$ , sendo  $\delta_i$  uma perturbação aleatória. Tais modelos são mais fáceis de ajustar, pois permitem o emprego direto de técnicas de regressão múltipla.

Em primeiro lugar, tais formulações não geram probabilidades, pois a soma dos  $s_i$  não é mais igual à unidade. Mais do que isso, as elasticidades de  $s_i$  em relação a um atributo explicativo qualquer  $X_{ki}$  não representam adequadamente a realidade. De fato, a elasticidade puntual do nível de "market share"  $s_i$  em relação ao atributo  $X_{ki}$  dessa mesma alternativa, é dada pelas seguintes relações:

Modelo linear:

$$\varepsilon_{s_i} = \frac{\beta_k \cdot X_{ki}}{s_i} \quad (4)$$

Modelo multiplicativo:

$$\varepsilon_{s_i} = \beta_k \quad (5)$$

É de se esperar que a elasticidade do *market share*  $s_i$  se aproxime de zero quando  $s_i$  se aproximar da unidade. Isso porque a conquista de fatias marginais do mercado vai se tornando cada vez mais difícil à medida que a empresa vá ocupando uma fração maior do mesmo. Observa-se que nenhum dos dois modelos (linear e multiplicativo) satisfazem tal condição. No caso específico do modelo multiplicativo, a elasticidade é constante para qualquer circunstância, o que, mais uma vez, não traduz as condições reais. Por essas razões, esses tipos de modelo deixaram de ser adotados na prática, sendo utilizados nas aplicações *modelos de atração* do tipo (1).

Dois tipos básicos de modelo de atração são usualmente utilizados. O primeiro, denominado MCI (*Multiplicative Competitive Interaction*) (Cooper *et al.*, 1988), tem a seguinte formulação:

$$A_i = \exp(\beta_{0i}) \cdot \prod_{k=1}^K X_{ki}^{\beta_k} \cdot \delta_i \quad (6)$$

onde  $A_i$  é a atração, com  $s_i$  dado por (1). O segundo tipo é o Modelo Logit Multinomial (MNL):

$$A_i = \exp(\beta_{0i} + \sum_{k=1}^K \beta_k \cdot X_{ki} + \delta_i) \quad (7)$$

com  $s_i$  dado igualmente por (1).

As elasticidades de  $s_i$  em relação a um atributo  $X_{ki}$ , dos modelos MCI e MNL, são respectivamente:

$$\varepsilon_i = \beta_k (1 - s_i) \quad (8)$$

$$\varepsilon_i = \beta_k (1 - s_i) X_{ki} \quad (9)$$

Observa-se que, para ambos os modelos, a elasticidade tende a zero quando  $s_i \rightarrow 1$ , satisfazendo assim as características intrínsecas do problema. Por outro lado, quando  $X_{ki} \rightarrow 0$ , a elasticidade se anula para o modelo MNL, assumindo valor positivo para o modelo MCI. Faz-se uso dessa propriedade na seleção do modelo de atração mais adequado para representar um determinado problema real. Por exemplo, quando os atributos representarem preço, é comum se observar elasticidades não nulas mesmo



para valores pequenos dos atributos. Nesses casos o modelo MCI pode ser uma boa opção.

#### 4. Ajuste de Modelos de Participação de Mercado

Quando o número  $m$  de alternativas do problema for restrito a dois, o modelo de atração do tipo Logit (binomial, no caso) pode ser resolvido indiretamente através de regressão linear múltipla. De fato, a expressão (1), nesse caso, se simplifica:

$$s_1 = \frac{A_1}{A_1 + A_2} = \frac{1}{1 + (A_2 / A_1)} \quad (10)$$

Invertendo a expressão (10), passando a unidade para o primeiro membro, e aplicando logaritmos, obtém-se:

$$\ln \left[ \frac{1}{s_1} - 1 \right] = \ln[A_2] - \ln[A_1] \quad (11)$$

Substituindo  $A_1$  e  $A_2$  conforme (7), em (11), obtém-se a forma linearizada, passível de ajuste dos coeficientes via regressão múltipla:

$$\ln \left[ \frac{1}{s_1} - 1 \right] = (\beta_{0,2} - \beta_{0,1}) + \beta_k \sum_{k=1}^K (X_{k2} - X_{k1}) + (\delta_2 - \delta_1) \quad (12)$$

Para problemas com  $m > 2$  é necessário utilizar métodos mais sofisticados para calibrar o modelo de atração. Examinaremos dois: (a) método da máxima verossimilhança e (b) aproximação log-linear.

#### 4.1 Ajuste por Máxima Verossimilhança

Para aplicar o método da máxima verossimilhança partimos da função  $f(p_i|X, \beta)$  que define a probabilidade  $p_i$ , de ocorrência dos eventos em análise, condicionada aos vetores  $X$  e  $\beta$ . Admitimos que os dados são obtidos através de uma amostra aleatória formada por  $n$  indivíduos. Cada indivíduo seleciona uma alternativa dentre as  $m$  alternativas disponíveis. Assim, após o levantamento, teremos, para cada alternativa  $i$ , o número de indivíduos  $n_i$  que selecionaram essa alternativa. Em lugar de representar a participação de mercado através de  $s_i$ , admitimos que, no limite (isto é, para  $n$  grande) o *market share* se confunde com a probabilidade  $p_i$ . A função de verossimilhança é dada por:

$$L^* = \prod_{i=1}^m f(p_i|X, \beta) = \prod_{i=1}^m (p_i)^{n_i} \quad (13)$$

e aplicando logaritmos:

$$L = \ln(L^*) = \sum_{i=1}^m n_i \ln(p_i) \quad (14)$$

Buscamos então o vetor  $\hat{\beta} = \{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k\}$  que maximiza a função (13) ou, mais facilmente, a função (14). O método mais empregado para o ajuste é o de Newton-Raphson (Dixon, 1972; Ben-Akiva et al, 1985). Inicialmente define-se um vetor inicial dos coeficientes,  $\beta^{(0)} = \{\beta_0^{(0)}, \beta_1^{(0)}, \dots, \beta_k^{(0)}\}$ , uti-

lizando, daí para diante, o seguinte método iterativo:

$$\beta^{(z+1)} = \beta^{(z)} - \nabla^{(z)} \cdot H^{-1}[\beta^{(z)}] \tag{15}$$

onde  $\beta^{(z)}$  representa, na  $z^{\text{ésima}}$  iteração, o vetor dos coeficientes, sendo  $\nabla^{(z)}$  o vetor gradiente correspondente, e  $H^{-1}$  a matriz inversa da matriz hessiana:

$$H[\beta^{(z)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L^*}{\partial [\beta_0^{(z)}]^2} & \frac{\partial^2 L^*}{\partial \beta_0^{(z)} \partial \beta_1^{(z)}} \cdots & \frac{\partial^2 L^*}{\partial \beta_0^{(z)} \partial \beta_k^{(z)}} \\ \frac{\partial^2 L^*}{\partial \beta_1^{(z)} \partial \beta_0^{(z)}} & \frac{\partial^2 L^*}{\partial [\beta_1^{(z)}]^2} \cdots & \frac{\partial^2 L^*}{\partial \beta_1^{(z)} \partial \beta_k^{(z)}} \\ \frac{\partial^2 L^*}{\partial \beta_k^{(z)} \partial \beta_0^{(z)}} & \frac{\partial^2 L^*}{\partial \beta_k^{(z)} \partial \beta_1^{(z)}} \cdots & \frac{\partial^2 L^*}{\partial [\beta_k^{(z)}]^2} \end{bmatrix} \tag{16}$$

A matriz hessiana H não pode ser singular (determinante nulo) para que sua inversa seja definida. A convergência é controlada através da comparação dos vetores sucessivos  $\beta^{(z)}$  e  $\beta^{(z+1)}$ , terminando o processo quando os mesmos estiverem suficientemente próximos entre si.

### 4.2 Ajuste por Aproximação Log-Linear

Os modelos MCI e MNL podem ser linearizados através de uma transformação aproximada (Theil, 1969; Cooper *et al*, 1988). Seja, por exemplo, o modelo MCI dado por (6). Inicialmente aplicamos logaritmos a ambos os membros de (1), onde substituímos  $A_i$  por (6):

$$\ln s_i = \beta_{0,i} + \sum_{k=1}^K \beta_k \cdot \ln X_{ki} + \ln \delta_i - \ln \left\{ \sum_{j=1}^m [\beta_{0,j} \prod_{k=1}^K X_{kj}^{\beta_k} \cdot \delta_j] \right\} \tag{17}$$

Somamos agora ambos os membros de (17) ao longo de i (i = 1,2,..., m), e dividimos o resultado por m:

$$\ln \tilde{s} = \bar{\beta}_0 + \sum_{k=1}^K \beta_k \cdot \ln \tilde{X}_k + \ln \tilde{\delta} - \ln \left\{ \sum_{j=1}^m [\beta_{0,j} \prod_{k=1}^K X_{kj}^{\beta_k} \cdot \delta_j] \right\} \quad (18)$$

onde  $\tilde{s}$ ,  $\tilde{X}_k$  e  $\tilde{\delta}$  representam as médias geométricas de  $s_i$ ,  $X_{ki}$  e  $\delta_i$  em relação a  $i$  respectivamente, ou seja:

$$\tilde{s} = [s_1 s_2 \dots s_m]^{1/m} \quad (19)$$

sendo  $\bar{\beta}_0$  a média aritmética de  $\beta_{0,i}$  ( $i=1,2,\dots,m$ ). Subtraímos agora a expressão (18) de (17), obtendo:

$$\ln(s_i / \tilde{s}) = \gamma_i + \sum_{k=1}^K \beta_k \cdot \ln(X_{ki} / \tilde{X}_k) + \varphi_i \quad (20)$$

onde

$$\gamma_i = (\beta_{0,i} - \bar{\beta}_0) \text{ e } \varphi_i = \ln(\delta_i / \tilde{\delta}).$$

Observa-se que, agora, o modelo está linearizado, podendo ser ajustado através de regressão múltipla. De forma semelhante, para o modelo MNL se chega à forma linearizada:

$$\ln(s_i / \tilde{s}) = \gamma_i + \sum_{k=1}^K \beta_k (X_{ki} - \bar{X}_k) + (\delta_i - \tilde{\delta}) \quad (21)$$

onde  $\bar{X}_k$  e  $\tilde{\delta}$  são as médias aritméticas em relação a  $i$  de  $X_{ki}$  e  $\delta_i$  respectivamente. Notar que  $\gamma_i$  depende da alternativa  $i$ , constituindo o que correntemente se denomina

*constante de alternativa discreta*. Pode-se arbitrariamente fazer uma das constantes  $\gamma_i$  igual a zero sem alterar os resultados (Ben Akiva e Lerman, 1985), restando portanto  $m-1$  valores de  $\gamma_i$  a calibrar ( $m$  é o número de alternativas). Essas constantes incorporam outras variáveis não explicitadas no modelo, devendo o analista procurar entender seu significado e avaliar a necessidade ou não de ampliá-lo de forma a incorporar os elementos faltantes.

## 5. Exemplo de Aplicação

Como exemplo de aplicação de modelos de "market share" em transportes, selecionamos o serviço intermunicipal de ônibus, responsável, segundo o Geipot, por 95% do movimento de passageiros nas estradas brasileiras (volume medido em passageiros-km). Esse tipo de transporte de pessoas tem sido altamente regulado no País. Em Outubro de 1993, depois de muitas promessas, o Governo Federal finalmente sancionou o decreto 952, que trata dos serviços interestaduais

e internacionais de ônibus. O transporte intermunicipal de passageiros dentro de um mesmo estado é controlado por um órgão regional subordinado a sua Secretaria de Transportes. Mas a política adotada nos estados segue, em linhas gerais, a linha definida pelo Governo Federal.

Embora de forma relativamente tímida, a nova legislação federal dá ênfase à competição entre os operadores, reconhecendo seus efeitos positivos para a melhoria dos serviços. A concessão de um determinado serviço, de acordo com o mencionado decreto, será baseada em concorrência em que os proponentes, além de satisfazer às exigências técnicas e operacionais, deverão indicar o nível tarifário que estão dispostos a cobrar. Os proponentes com menores níveis tarifários serão os escolhidos. Prevê-se também a participação de mais de um operador numa mesma linha, quando hoje ocorrem verdadeiros monopólios.

As mudanças, embora tímidas, apontam na direção de um maior grau de liberalização do setor. As empresas operadoras, em consequência, estão preocupadas com a concorrência que, mais cedo ou mais tarde, terão que enfrentar em

seus domínios. Acostumados a um longo período sem competição, os operadores não sabem como responder a uma eventual invasão em seus territórios. Nesta hora, técnicas que permitam avaliar os efeitos de linhas de ação alternativas sobre o mercado, são bemvindas.

O exemplo selecionado neste texto corresponde a uma linha intermunicipal de ônibus ligando duas cidades. Tres tipos de serviço são oferecidos ao público: (a) *expresso*; (b) *semi-expresso* e (c) *local*. No *serviço expresso* os ônibus não param ao longo do percurso. Já no *serviço semi-expresso* ocorrem poucas paradas intermediárias, em locais previamente definidos. Finalmente o *serviço local* atende toda a população lindeira, desembarcando e recebendo passageiros sempre que solicitado. Os tempos médios de viagem (tempo no ônibus) são respectivamente de 2,5 horas para serviço expresso, 3,0 horas para semi-expresso e 3,5 horas para o local.

A frota de veículos em operação não é homogênea em termos de conforto para os usuários. O serviço expresso oferece ônibus mais confortáveis, dotados de maior espaço para as pernas, ar condicionado, bancos mais largos e com

reclinação em 4 níveis, bagageiro interno maior e fechado, toaleta com componentes tipo luxo (veículo tipo A). Os demais serviços são realizados por veículos sem ar condicionado, bancos com espaçamento conforto padrão, bagageiro comum e banheiro também comum. (veículo tipo B). As tarifas também são diferenciadas: o serviço expresso cobra tarifa de R\$ 7,00, enquanto os demais serviços cobram tarifa de R\$ 6,00.

O objetivo de nosso modelo é representar as condições de mercado no período de pico (entre 7 e 9 horas da manhã) de um dia útil típico. Neste exemplo estudamos o comportamento do mercado em apenas uma direção. Modelos mais completos, envolvendo estratificação de mercado (diferentes classes de usuários), sentidos diversos, vários períodos do dia e da semana, etc podem ser desenvolvidos em computador, para aplicações reais. Neste texto ficaremos com um exemplo mais simples, com a finalidade precípua de analisar a metodologia. No Quadro 1 são apresentadas as características relevantes das cinco saídas de ônibus disponíveis no período de pico em questão. Há duas empresas operando na linha (que denomina-

mos de empresas 1 e 2 no Quadro 1).

Com a finalidade de calibrar o modelo, foram levantados os movimentos de passageiros nos 5 horários, cobrindo 40 dias úteis (Quadro 2). Os números indicados correspondem apenas aos passageiros que fazem o percurso completo, isto é, entre os dois pontos extremos da linha. Isso porque o comportamento dos usuários que se destinam a pontos intermediários da rota é distinto dos primeiros, devendo ser modelados separadamente, se necessário. Quatro tipos de atributos são considerados nesta análise: (a) a *atração*, ou imagem, da empresa operadora; (b) o *tempo de viagem*; (c) a *tarifa* e (d) o *nível de conforto*. A atração ou imagem da empresa pode ser entendida como sendo a força de captação da demanda independentemente dos demais atributos considerados. Assim, se as empresas concorrentes tiverem imagem diferente, e se ambas oferecerem serviços idênticos (mesmo tipo de veículo, mesma tarifa e mesmo tempo de viagem), a participação de mercado resultante não será 50-50%, mas resultará em parcela maior para empresa com

maior grau de atração. Maior atração é obtida de formas diversas: tradição no mercado, imagem externa (limpeza, pintura dos veículos, atendimento, etc), segurança, e propaganda e esforço de "marketing".

Tanto o tempo de viagem, como a tarifa, são variáveis contínuas, passíveis de quantificação, o que facilita sua representação no modelo. Já a atração da empresa e o nível de conforto são variáveis discretas e de natureza qualitativa. Por essa razão somos obrigados a definir variáveis "dummy" para representar esses atributos. No total nosso modelo tem 4 variáveis, a saber:

t-tempo de viagem, em horas (variável contínua);

p-preço, ou tarifa, em R\$ (variável contínua);

$d_1$ -igual a zero para empresa 1, sendo igual a um para empresa 2 (variável "dummy");

$d_2$ -igual a zero para conforto B, sendo igual a um para conforto A (variável "dummy");

Temos  $m = 5$  alternativas em nosso modelo (os 5 horários disponíveis) e  $T = 40$  amostras diferentes, representando os dias úteis para os quais foram levantados os dados. Adotamos modelo tipo MNL (logit multinomial). A função atração é dada por:

$$A_i = \exp[\beta_0^{(i)} + \beta_1 \cdot t^{(i)} + \beta_2 \cdot p^{(i)} + \beta_3 \cdot d_1^{(i)} + \beta_4 \cdot d_2^{(i)}] \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (22)$$

sendo o "market share" dado pela expressão (1). As constantes  $\beta_0^{(i)}$  são denominadas de *constantes de alternativa discreta*, e dependem da alternativa  $i$

Vamos calibrar inicialmente o modelo por meio da aproximação log-linear (relação 21). Para isso precisamos calcular, para cada estrato de amostra (cada dia útil), o logaritmo do "market share"  $s_i$  di-

vidido pela média geométrica (variável dependente na regressão). Por exemplo, para dia 1, o Quadro 2 indica um total de 107 passageiros transportados no período de pico. Dividindo o movimento de cada horário pelo total, temos os respectivos "market shares":  $s_1 = 30/107 = 0,280$ ,  $s_2 = 16/107 = 0,149$ , etc. A média geométrica dos cinco valores de "market share",

**QUADRO 1**  
 Serviços Disponíveis no Período de Pico  
 Transporte Intermunicipal em Ônibus

#	Empresa	Horário Saída	Tempo Viagem (hs)	Tarifa (R\$)	Nível de Conforto
I	1	7:00	2.5	7.0	A
II	2	7:30	3.0	6.0	B
III	1	8:00	2.5	7.0	A
IV	1	8:30	3.0	6.0	B
V	2	8:45	3.5	6.0	B

**QUADRO 2**  
 Dados Estatísticos Sobre Passageiros Embarcador  
 Transporte Intermunicipal em Ônibus

Horário dia	I 7:00	II 7:30	III 8:00	IV 8:30	V 8:45	Total
1	30	16	28	20	13	107
2	31	16	30	20	12	109
3	31	17	32	21	12	113
4	29	18	32	22	13	114
5	29	17	31	20	12	109
6	31	15	28	19	12	105
7	32	16	31	24	14	117
8	30	17	30	17	11	105
9	26	15	27	19	12	99
10	30	17	33	21	13	114
11	30	16	29	20	13	108
12	31	17	32	20	13	113
13	27	17	28	21	14	107
14	31	16	32	21	12	112
15	27	15	33	22	11	108
16	30	14	30	22	11	107
17	27	14	33	21	13	108
18	32	16	31	18	13	110
19	31	15	28	21	14	109
20	33	16	27	20	15	111
21	31	15	29	19	12	106
22	30	14	31	21	13	109
23	34	15	30	18	14	111
24	27	15	28	20	12	102
25	29	18	30	22	13	112
26	33	17	31	23	14	118
27	30	16	29	20	12	107
28	32	15	32	21	14	114
29	35	16	26	21	13	111
30	28	16	29	18	14	105
31	29	17	29	21	11	107
32	31	16	26	19	15	107
33	28	15	29	20	11	103
34	29	16	28	22	15	110
35	32	15	29	22	14	112
36	31	14	32	23	14	114
37	35	15	29	20	15	114
38	27	16	28	22	13	106
39	28	14	32	23	14	111
40	27	15	29	20	12	103

para esse caso, é 0,190. Então os valores do primeiro membro da equação (22) são:

$$\ln(s_1 / \bar{s}) = \ln(0,280 / 0,190) = 0,380776$$

$$\ln(s_2 / \bar{s}) = \ln(0,149 / 0,190) = -0,24308,$$

etc.

Para aplicar a regressão múltipla preparamos uma função estruturada conforme a relação (21) (Cooper *et al*, 1988):

$$y_i = \ln(s_i / \bar{s}) = \beta_0 + \beta_1 \cdot [t^{(i)} - \bar{t}] + \beta_2 \cdot [p^{(i)} - \bar{p}] + \beta_3 \cdot [d_1^{(i)} - \bar{d}_1] + \beta_4 \cdot [d_2^{(i)} - \bar{d}_2] \quad (23)$$

onde  $\bar{t}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{d}_1$ ,  $\bar{d}_2$ ,  $\bar{d}_3$ , e  $\bar{d}_4$  são as médias aritméticas dos atributos ao longo das alternativas. Por exemplo,

$$\bar{t} = \left( \sum_{j=1}^m t^{(j)} \right) / m, \text{ etc.}$$

Temos  $40 \times 5 = 200$  conjuntos de dados (40 dias, 5 horários por dia, Quadro 2). Aplicando regressão múltipla linear, de acordo com a formulação (23), usando para isso um programa específico, obtivemos os resultados indicados no Quadro 3. O valor do coeficiente de determinação,  $r^2 = 0,964$ , é satisfatório. Os sinais dos coeficientes de  $t$  e de  $p$  estão de acordo com o esperado, isto é, ambos são negativos. Neste exemplo de aplicação as constantes

de alternativa discreta, do tipo  $\gamma_i$  em (21), não foram ajustadas porque, neste exemplo, o fator básico que diferencia tais parâmetros é constituído pela empresa que opera o serviço, e essa característica já está explicitada através das variáveis “dummy”  $d_1$  e  $d_2$ . Ou seja, neste exemplo os coeficientes  $\beta_3$  e  $\beta_4$  fazem o papel dos  $\gamma_i$  na expressão (21). Tal afirmativa é apoiada no fato de ser nulo o intercepto da regressão ajustada (Quadro 3). Assim, o modelo de “market share” apresenta a seguinte formulação:

$$s_i = \frac{A_i}{\sum_{j=1}^m A_j} \quad (24)$$

$$\text{onde } A_i = \exp[-0,3953 t^{(i)} - 0,4877 p^{(i)} - 0,2680 d_1^{(i)} + 0,6642 d_2^{(i)}] \quad (25)$$

onde  $t^{(i)}$  é o tempo de viagem da alternativa  $i$ ;  $p^{(i)}$  é o preço da pas-

sagem;  $d_1^{(i)}$  é igual à unidade se a empresa for a 2, sendo zero em



caso contrário; e  $d_2^{(i)}$  é igual a um para nível de conforto A, sendo nulo em caso contrário.

O modelo pode também ser ajustado por meio da maximização da função de verossimilhança, dada por:

$$L^* = \prod_{t=1}^T \prod_{i=1}^m p_t(i)^{n_{ti}} \quad (26)$$

$t$  (1,2,...,T) representa os dias indicados no Quadro 2;  $n_{ti}$  é o número de passageiros embarcados no horário  $i$ , no dia  $t$ ; e  $p_t(i)$  é a probabilidade de

que um passageiro escolha o horário  $i$ , no dia  $t$ , dada pelo modelo logit:

$$p_t(i) = \frac{A_i}{\sum_{j=1}^m A_j} = \frac{\exp(\beta \cdot X_{ti})}{\sum_{j=1}^m \exp(\beta \cdot X_{tj})} \quad (27)$$

Aplicando logaritmos à expressão (26), combinada com (27), obtém-se a função de verossimilhança transformada, que deve ser maximizada em relação ao vetor  $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k\}$  dos coeficientes:

$$L = \ln(L^*) = \sum_{t=1}^T n_{ti} \left[ \beta \cdot X_{ti} - \ln \sum_{j=1}^m \exp(\beta \cdot X_{tj}) \right] \quad (28)$$

Aplicando o método de Newton-Raphson ao modelo acima, para o problema descrito nos Quadros 1 e 2, obtivemos os resultados indicados no Quadro 4. Os valores de  $t$  de Student são todos significativos: à exceção da variável 1 (atração da empresa 1), significativa ao nível 0,05, todas as demais variáveis são

significantes ao nível 0,01 (ou seja, nível de confiança de 99 %). Maiores detalhes sobre os testes estatísticos relacionados com ajustes deste tipo, consultar Ben-Akiva *et al* (1985). Efetuando as agregações das variáveis "dummy", conforme descrito anteriormente, chegamos à seguinte expressão para a função de atração:

$$A_i = \exp[-0,3228 t^{(i)} - 0,1097 p^{(i)} - 0,2502 d_1^{(i)} + 0,3410 d_2^{(i)}] \quad (29)$$

Comparando os coeficientes das expressões (25) e (29) obser-

vamos que seus valores estão relativamente próximos, embora distin-

**QUADRO 3**

Modelo Participação de Mercado - Aprox. Log-Linear  
Transporte Intermunicipal em Ônibus

Número de Observações 200

Coeficientes da Regressão:	
Constante da Regressão	-0.00000
Tempo de Viagem (hr)	-0.39531
Tarifa (R\$)	-0.48768
Atração Emp. 2/Emp 1	-0.26801
Nível Conf. A/B	0.66420
Coeficiente de Determinação (R <sup>2</sup> )	0.9645
Erro Padrão da Estimativa	0.0656

**QUADRO 4**

Modelo Participação de Mercado - Max. Verossim.  
Transporte Intermunicipal em Ônibus  
Resultados do Ajuste Estatístico

Variável	Coefficiente	Erro Assintotico	Estatist. t
1 Tempo Viagem (hr)	-0.32280	0.0122	-26.4
2 Tarifa	-0.10970	0.0055	-19.8
3 Atração Empresa 2	-0.25020	0.1118	-2.2
4 Nível Conforto A	0.34100	0.1118	3.0

**Estatísticas:**

Número de Observações	40
Número de Casos	160
L (0)	-64.378
L (beta)	-62.251
$-2^* [L(0) - L(\text{beta})]$	4.254
$\rho^{**2}$	0.033
$\rho \text{ barra }^{**2}$	-0.029

tos. Apesar de o modelo aproximado (log-linear) ter apresentado um  $r^2$  elevado, o ajuste, para ser confiável, exige uma amostra bem maior do que a necessária para o caso da maximização da função de verossimilhança. No entanto, pelas facilidades de uso de pacotes computacionais de uso corrente, que oferecem programas de regressão linear múltipla, o método de aproximação log-linear é muito utilizado em estudos de marketing.

Outro tipo de estudo que deve ser realizado antes de utilizar o modelo é a análise das elasticidades.

Para isso vamos escolher a expressão (29) como função de atração de nosso modelo, aplicando-a a cada uma das 5 alternativas (horários) indicados no Quadro 1. Obtemos os seguintes valores para os "market shares":

$$s_1 = 0,274 \quad ; \quad s_2 = 0,144 \quad ; \quad s_3 = 0,274; s_4 = 0,185 \quad ; \quad s_5 = 0,123$$

Calculamos, a seguir, as elasticidades de  $s_i$  em relação ao tempo (t) e à tarifa (p), utilizando, para isso, a expressão (9). Por exemplo, para a alternativa  $i = 1$ , a elasticidade em relação ao tempo é dada por:

$$\varepsilon_{1,t} = \beta_1 [1 - p(i)] X_{1,t} = -0,3228 \cdot [1 - 0,274] \cdot 2,5 = -0,586$$

A *elasticidade agregada* (ou média), é calculada ponderando-se os valores obtidos para cada alternativa pelos respectivos "market shares" (Ben-Akiva *et al*, 1985):

$$\varepsilon_t = \sum_{i=1}^m s_i \cdot \varepsilon_{ti} \quad (30)$$

Efetuando os cálculos para as elasticidades em relação ao tempo e à tarifa, obtemos respectivamente os valores -0,708 e -0,557. Tais valores são razoáveis e

estão dentro dos limites usuais. Outro aspecto a analisar é o efeito da atração (imagem) das empresas sobre o público. Se admitirmos que ambas as empresas ofereçam serviços exatamente iguais, isto é, tempos, tarifas e conforto rigorosamente os mesmos, o "market share" da empresa 2 passa a ser dado por:

$$s_2 = \frac{\exp(-0,2502)}{1 + \exp(-0,2502)} = 0,438 \quad (31)$$

onde  $-0,2502$  é o coeficiente da variável "dummy" que representa a empresa 2 (vide relação 29). Lembrar que o coeficiente correspondente à empresa 1 é zero, razão pela qual o valor correspondente da função exponencial, que aparece no denominador, é igual à unidade. O resultado obtido através de (32) mostra que a "imagem" da empresa 1, por si só, capta cerca de 56,2 % do mercado, ficando a empresa 2 com os 43,8 % restantes.

## 6. Utilização do Modelo de Participação de Mercado

Uma vez calibrado, o modelo é normalmente utilizado como estrutura central de um sistema de suporte à decisão. O objetivo é realizar "simulações prospectivas", em que o executivo da empresa operadora ou do órgão controlador faz hipóteses sobre as formas de oferta de serviço, calcula os "market shares" através do modelo, analisa os resultados e, se achar necessário, volta a alterar as hipóteses, reciclando o processo de análise.

Suponhamos que, num dia útil típico, se tenha uma demanda agregada, no período pico, de 112 passageiros. Aplicando os "market shares" calculados acima, obtemos

os resultados indicados na quarta coluna do Quadro 5 (caso i). Observamos que a demanda para o horário das 8:45, da empresa 2, está baixa (13 passageiros). Na realidade não estamos computando, em nosso modelo, os passageiros que se destinam aos pontos intermediários do percurso. Há, assim, uma receita adicional que não está sendo considerada na análise. No entanto, como a ligação entre os dois pontos extremos da rota constitui um mercado importante, é justo que o operador procure aumentar sua fatia nesse mercado.

Uma vez que a demanda é mais sensível em relação ao tempo de viagem (o que é evidenciado pelas elasticidades), uma medida aparentemente proveitosa para o operador 2 seria transformar o serviço V em expresso, isto é, com 2,5 hs de viagem, mas mantendo o nível de conforto B e a tarifa de R \$ 6,00. Aplicando novamente o modelo de "market share" a essa nova situação (caso ii, no Quadro 5), vemos que o número esperado de passageiros subiu de 13 para 18, para o horário das 8:45, um aumento de 38 % na demanda.

Seguindo na simulação prospectiva, passamos a verificar os re-

sultados decorrentes de melhorar o nível de conforto do serviço das 8:45, passando-o de B para A, e aumentando a tarifa de R \$ 6,00 para R\$ 6,50 (caso iii, no Quadro 5). Agora a demanda é de 23 passageiros, cerca de 77 % maior do que na situação atual.

Pode-se também simular a entrada de novos serviços, bem como a extinção de outros. É comum também se fazer a análise dos resultados econômicos e financeiros de cada serviço, como também por empresa. Um modelo de participação de mercado desse tipo pode servir de núcleo central para o desenvolvimento de um sistema de suporte à decisão mais amplo, refletindo de forma mais detalhada as condições específicas vigentes numa determinada empresa ou setor.

## 7. Conclusões

Neste trabalho procuramos mostrar o potencial de modelos de participação de mercado em estudos de transportes. O assunto é vasto, cabendo ainda discussões de outros tópicos importantes, que não puderam ser abordados neste texto por falta de espaço.

Um dos aspectos que merece atenção especial é a utilização

de dados de pesquisa de preferência declarada em modelos de "market share" (Novaes *et al*, 1994). Devido à regulamentação excessiva dos serviços de transportes no Brasil ocorrem situações em que as alternativas oferecidas aos usuários não mostram variações significativas dos atributos relevantes. Assim, no exemplo analisado neste texto, poderíamos ter uma tarifa única, independentemente do fato de se ter um serviço expresso, ou não. Igualmente, por força da regulamentação, o nível de conforto poderia ser uniforme em todos os horários oferecidos. Nesses casos torna-se difícil calibrar um modelo de participação de mercado apoiado exclusivamente em dados históricos. Uma forma de contornar essa restrição é realizar entrevistas junto aos usuários em que esses manifestam suas preferências em relação a alternativas fictícias, mas realistas. Os dados desse tipo de pesquisa servem para calibrar o vetor  $\beta$  do modelo. Posteriormente se faz um segundo ajuste, através de variáveis denominadas de *fatores de escala*, calibrando agora o modelo em relação aos dados históricos disponíveis (Novaes *et al*, 1994).

Quadro 5  
Exemplo de Simulações Prospectivas  
Com o Modelo de Participação de Mercado

serviço	operador	horário	Caso (i) (pass) (*)	Caso (ii) (pass) (**)	Caso (iii) (pass) (***)
I	1	7:00	31	29	28
II	2	7:30	16	16	14
III	1	8:00	31	29	28
IV	1	8:30	21	20	19
V	2	8:45	13	18	23
Total:			112	112	112

(\*) Situação atual;

(\*\*) Apenas redução do tempo de viagem de 3,5 hs para 2,5 hs no serviço V (8:45 hs);

(\*\*\*) Situação (\*\*), com tarifa de R \$ 6,50 e conforto nível A.

## 8. Referências Bibliográficas

- BELL, D.E., R.L. KEENEY e J.D.C. LITTLE (1975), *A Market Share Theorem*, Journal of Marketing Research, vol. XII (Maio), pp 136-141.
- BEN-AKIVA, M. e LERMAN, S.R., *Discrete Choice Analysis: Theory and Application to Travel Demand*, The M.I.T. Press, Cambridge, Mass, E.U.A., 1985.
- BOEING COMPANY, THE, *Market Share Modeling: A Method for Estimating the Consequences of Airline Competitive Strategy Options*, Sales Technology - Boeing Commercial Airplane Company, Seattle, Washington, 1982.
- BOULDING, W. & STAELIN, R., *Environment, Market Share, and Market Power*, Management Science, vol. 36, pp. 1160-77, 1990.
- BRANCH, B., *The Laws of the Marketplace and ROI Dynamics*, Financial Management, vol. 9, pp 58-65, 1980.
- BRODIE, R. & KLUYVER, C.A., *Attraction Versus Linear and Multiplicative Market Share Models: an Empirical Evaluation*, Journal of Marketing Research, vol. XXI, pp. 194-201, 1984.
- BUZZELL, R.D. & GALE, B.T. & SULTAN, R.G., *Market Share - a Key to Profitability*, Harvard Business Review, vol. 53, pp. 97-106, 1975.
- COOPER, L.G. & NAKANISHI, M., *Market-Share Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, Mass.,EUA, 1988.
- DIXON, L.C.W., *Nonlinear Optimization*, The English Univ. Press Ltd, Londres, 1972.
- GHOSH, A. & NESLIN, S. & SHOEMAKER, R., *A Comparison of Market Share Models and Estimation Procedures*, Journal of Marketing Research, vol. XXI, pp. 202-10, 1984.
- JACOBSON, R. & AAKER, D.A., *Is Market Share All That It's Cracked Up To Be?*, Journal of Marketing, vol. 49, pp. 11-22, 1985.
- MALHOTRA, N.K., *The Use of Linear Logit Models in Marketing Research*, Journal of Marketing Research, vol. XXI, pp. 20-31, 1984.
- MAZZON, J.A., GUAGLIARDI, J.A. & FONSECA, J.S., *Marketing: Aplicações de Métodos Quantitativos*, Editora Atlas, São Paulo, 1983.

- NOVAES, A.G. & CARVALHO, M.C., *Market Share Modelling of Intercity Bus Travel in Brazil*, Seventh International Conference on Travel Behaviour, Valle Nevado, Santiago, Chile, Junho 1994.
- PORTER, M., *Competitive Strategy*, The Free Press, New York, EUA, 1980.
- SIMON, H., *Pricing Opportunities - and How to Exploit Them*, Sloan Management Review, Winter, pp. 55-65, 1992.
- THEIL, H., *A Multinomial Extension of the Linear Logit Model*, International Economics Review, vol. 10 (outubro), pp. 251-259, 1969.
- WILLIAMS, H. C.W.L., *Public Transport Services Under Market Arrangements, Part I: A Model of Competition Between Independent Operators*, Transportation Research, vol. 27B, nº 5, pp. 369-387, 1993.

---

(\*) Professor titular, área de Transportes e Logística, do Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina