MODELOS DE OPORTUNIDADES INTERVENIENTES DE DISTRIBUIÇÃO DE VIAGENS: UM NOVO MÉTODO DE CALIBRAÇÃO DO MODELO DE SCHNEIDER

Nilo Kühlkamp [1]
Departamento de Matemática – UFSC

Ismael Ulysséa Neto [2]
Departamento de Engenharia Civil - UFSC

Recebido: 15/06/2002 - Aprovado: 15/08/2002

RESUMO

Uma das questões importantes, sobre a qual se debruçam pesquisadores e planejadores urbanos, é o desequilíbrio entre a demanda e a oferta de espaço viário de circulação de veículos e pessoas, decorrente do aumento populacional, da expansão física das cidades e de seus sistemas de atividades. Para estimar a matriz de origem-destino de viagens resultante destas alterações, os modelos de oportunidades intervenientes são credenciados pela consistência teórica que apresentam. Daí resulta a importância desses modelos *"vis-à-vis"* os modelos gravitacionais, na avaliação dos efeitos da expansão urbana sobre os padrões de distribuição de viagens de pessoas, estudos de *market share*, etc.. Após analisar criticamente o modelo de Schneider e seus procedimentos alternativos de calibração, os autores propõem um novo procedimento de calibração para este modelo, baseado numa nova maneira de determinar o parâmetro λ, através do método da máxima verossimilhança. Tal procedimento conduziu a uma melhor interpretação desse parâmetro.

Palavras-chave: Distribuição de viagens; oportunidades intervenientes; modelo de Schneider; calibração.

ABSTRACT

An important problem which continues to be faced by urban researchers and planners is the unbalance between the provided and needed space for vehicles and persons circulation in urban areas which is due to their rapid growth of population, physical structures and activity systems. Concerning the estimation of the new trip origin-destination matrix which stems from such a growth, the intervening opportunities models of trip distribution have been recognized as the most appropriate from a theoretical view point. This reassures their importance, *"vis-à-vis"* the gravity models, in the assessment of urban expansion effects on the trip distribution patterns, market share analysis, etc.. After analysing the Schneider's intervening opportunities model, with its alternative calibration procedures, the authors present a new calibration procedure for the parameter λ which is related to the intervening opportunities. Such procedure is based upon the statistical maximum likelihood method, providing a more theoretically sound interpretation for λ.

Keywords: Trip distribution; intervening opportunities; Schneider's model; calibration

1. INTRODUÇÃO

Uma das informações mais relevantes para o planejamento de transporte de passageiros é, sem dúvida, a matriz de origem-destino (O-D) das viagens que ocorrem numa certa área de estudos. Esta importância é explicada, de um lado, pelo fato de que o conhecimento da distribuição espacial da demanda é condição básica para o dimensionamento do sistema de transporte coletivo urbano e, de outro lado, pelo fato de que a determinação dos volumes de tráfego nos segmentos que compõem a rede viária, é decorrência da alocação das viagens sobre esta rede. Taylor et al (1992) destacam a necessidade das informações sobre viagens para, entre outras finalidades, elaborar uma política de transportes, fazer previsões e modelagens, avaliar projetos relativos a transportes, projetar e implementar sistemas de transporte levando em conta seu impacto sobre o tráfego. Pode-se também ressaltar a importância da matriz O-D no estudo de questões relacionadas à segurança no trânsito, ao dimensionamento de pavimentos e aos possíveis impactos ambientais.

No processo de previsão da demanda de viagens, a determinação da matriz de O-D é, tradicionalmente, realizada por modelos matemáticos de distribuição de viagens, com destaque para os do tipo: a) gravitacional e b) de oportunidades intervenientes.

Em se tratando de estimar a matriz de O-D que resulta da modificação da intensidade e dos perfis de uso do solo urbano, os modelos de oportunidades intervenientes, por levar em conta, explicitamente, as oportunidades de satisfação dos propósitos dos viajantes, apresentam consistência teórica superior àquela dos modelos gravitacionais. Daí resulta a importância dos modelos de oportunidades intervenientes vis-à-vis os modelos gravitacionais, na avaliação dos efeitos da expansão urbana sobre os padrões de distribuição de viagens de pessoas, estudos de *market share*, etc.

2. MODELOS DE OPORTUNIDADES INTERVENIENTES

Para cada zona j define-se, para estes modelos, os números (V_j) das oportunidades oferecidas pela zona j. Estes números expressam o efeito de atração exercido pelas zonas de destino j.

Estes modelos se baseiam na premissa de que numa área urbana as viagens serão tão curtas quanto possível, sendo apenas longas o necessário para atingirem o destino aceitável mais próximo (i.e. onde o propósito do viajante será satisfeito). O modelo convencional de oportunidades intervenientes, atribuído a Morton Schneider (1959), é apresentado por Ulysséa Neto e Gonçalves (1993) com a seguinte formulação:

$$T_{ij} = O_i \cdot k_i \cdot e^{-\lambda W_{ij}} \left(1 - e^{-\lambda V_j}\right) \tag{1}$$

onde

T_{ij} = número de viagens com origem na zona i e destino na zona j,
O_i = número de viagens com origem na zona i,
λ = probabilidade de uma oportunidade ser aceita se for considerada,
W_{ij} = número de oportunidades intervenientes entre as zonas i e j,
V_j = número de oportunidades oferecidas pela zona j
k_i = constante de balanceamento associada à origem i.

A calibração dos modelos de oportunidades intervenientes depende da determinação da probabilidade λ de uma oportunidade ser aceita, se considerada. As duas formas correntes de determinar esta probabilidade apresentadas por Ruiter (1967), todavia, não fornecem um valor que seja intuitivamente natural para esta probabilidade.

Uma das formas de determinação de λ é através da equação a seguir:

$$\lambda = \frac{1}{4\rho \cdot \bar{r}^2}$$

onde

ρ = densidade média de destinos de viagens, dada em $\dfrac{\text{destinos de viagens}}{\text{milha}^2}$; e

$\bar{r}$ = comprimento médio das viagens.

A outra forma de obter o valor de λ é a partir de um valor já conhecido, para uma outra época ou outra área. Assim, a determinação do valor de λ, é feita pela equação:

$$\frac{\bar{r}_1}{\bar{r}_2} = \frac{\sqrt{\lambda_2 \rho_2}}{\sqrt{\lambda_1 \rho_1}}$$

onde

$\bar{r}_1, \lambda_1$ e ρ_1 se referem a uma época ou área para a qual a probabilidade λ_1 já havia sido determinada; e .

$\bar{r}_2, \lambda_2$ e ρ_2 se referem à época ou área para a qual se deseja determinar o valor da probabilidade λ_2.

Uma análise mais minuciosa da formulação acima nos leva a concluir que nenhuma dessas maneiras de determinar λ fornece o valor que seria natural esperar para esta probabilidade. De fato, o valor de λ está associado ao inverso do número médio de oportunidades (por viagem) consideradas pelo viajante, quando se considera a totalidade das viagens realizadas na área de estudos no intervalo de tempo considerado.

Nesse trabalho, mostra-se primeiramente que o estimador obtido para λ, através do método da máxima verossimilhança, é o inverso do número médio de oportunidades por viagem que são consideradas pelo viajante, correspondendo ao valor intuitivamente esperado para esta probabilidade. Em seguida, um novo procedimento de calibração do modelo de Schneider é apresentado, no qual se utiliza este estimador (obtido pelo método da máxima verossimilhança), como sendo o valor de λ.

3. OBTENÇÃO DE UM ESTIMADOR PARA A PROBABILIDADE λ ATRAVÉS DO MÉTODO DA MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

O modelo de Schneider, abaixo reproduzido:

$$T_{ij} = O_i \cdot k_i \cdot e^{-\lambda W_{ij}} \left(1 - e^{-\lambda V_j}\right)$$

pode também ser escrito da seguinte forma :

$$T_{ij} = O_i \cdot k_i : e^{-\lambda W_{ij}} \left(1 - \frac{1}{e^{\lambda V_j}}\right)$$

$$= O_i \cdot k_i \cdot e^{-\lambda W_{ij}} \cdot \frac{e^{\lambda V_j} - 1}{e^{\lambda V_j}} .$$

Segundo Ruiter (1967), o valor de λ é sempre muito peque no. Assim, o expoente de $e^{\lambda V_j}$ é também pequeno, o que permite obter uma boa aproximação para o numerador da fração $\frac{e^{\lambda V_j}-1}{e^{\lambda V_j}}$ através do polinômio de Taylor. Escrevendo $f(x)=e^x-1$, tem-se que $f'(x)=e^x$ e $f'(0)=e^0=1$, o que fornece o polinômio de Taylor de grau $n=1$ para f no ponto $a=0$, conforme abaixo:

$$p(x)=p(x-0)=f(0)+f'(0)\cdot x=(e^0-1)+1\cdot x=x .$$

Assim, tem-se

$$f(\lambda V_j)\cong p(\lambda V_j)=\lambda V_j$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{e^{\lambda V_j}-1}{e^{\lambda V_j}}\cong\frac{\lambda V_j}{e^{\lambda V_j}}=\lambda V_j e^{-\lambda V_j} .$$

Portanto,

$$\begin{aligned}T_{ij}&=O_i\cdot k_i\cdot e^{-\lambda W_{ij}}\cdot\frac{e^{\lambda V_j}-1}{e^{\lambda V_j}}\\&\cong O_i\cdot k_i\cdot e^{-\lambda W_{ij}}\cdot\lambda V_j e^{-\lambda V_j}\\&=O_i\cdot k_i\cdot\lambda V_j\cdot e^{-\lambda W_{ij}}\cdot e^{-\lambda V_j}\\&=O_i\cdot k_i\cdot\lambda V_j\cdot e^{-\lambda(W_{ij}+V_j)} .\end{aligned}$$

Sob a forma de probabilidade pode-se, então, escrever

$$p_{ij}\cong o_i\cdot k_i\cdot\lambda V_j\cdot e^{-\lambda(W_{ij}+V_j)}$$

onde $o_i=\frac{O_i}{T}$ representa a fração do total T de viagens na área de estudos que tem origem na zona i, e $p_{ij}=\frac{T_{ij}}{T}$ fornece a probabilidade, dada pelo modelo, de uma viagem ter origem na zona i e destino na zona j. Para aplicar o método da máxima verossimilhança parte-se de um conjunto de dados observados. No presente caso, este conjunto de dados é uma matriz (T_{ij}^*) de viagens observadas num certo intervalo de tempo. O método visa determinar o valor de λ para o qual a probabilidade de obtenção desta matriz (T_{ij}^*) (ao se fazer a distribuição da totalidade destas viagens) é maximizada.

Admitindo então que se tenha uma matriz (T_{ij}^*) de viagens observadas, e sendo

$$T^*=\sum_{i,j}T_{ij}^* ,$$

segue que a função de verossimilhança é

$$M=\prod_{i,j}(p_{ij})^{T_{ij}^*} .$$

Esta função representa a probabilidade de se obter a matriz observada de viagens (T_{ij}^*) ao se distribuir as T^* viagens entre os possíveis pares (i,j) e sendo p_{ij} a probabilidade de uma viagem ter origem na zona i e destino na zona j.

O problema, agora, consiste em determinar o valor de λ que maximize M. Como a função $\ln x$ é uma função crescente, para maximizar M basta maximizar

$$\begin{aligned}\ln M&=\ln\left[\prod_{i,j}(p_{ij})^{T_{ij}^*}\right]\\&=\sum_{i,j}T_{ij}^*\ln p_{ij}\\&\cong\sum_{i,j}T_{ij}^*\left[\ln o_i+\ln k_i+\ln\lambda+\ln V_j-\lambda(W_{ij}+V_j)\right] .\end{aligned}$$

Para simplificar a notação, seja

$$L=\sum_{i,j}T_{ij}^*\left[\ln o_i+\ln k_i+\ln\lambda+\ln V_j-\lambda(W_{ij}+V_j)\right] .$$

Derivando L em relação a λ obtém-se

$$\frac{dL}{d\lambda}=\sum_{i,j}T_{ij}^*\left(\frac{1}{\lambda}-W_{ij}-V_j\right).$$

Igualando esta derivada a zero obtém-se o valor crítico

$$\lambda=\frac{T^*}{\sum_{i,j}T_{ij}^*(W_{ij}+V_j)} .$$

Por outro lado, a derivada segunda

$$\frac{d^2L}{d\lambda^2}=\sum_{i,j}T_{ij}^*\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right)=-\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i,j}T_{ij}^*=-\frac{1}{\lambda^2}\cdot T^*$$

é menor do que zero para todo $\lambda\neq 0$, o que garante que o valor crítico encontrado é, de fato, um ponto de máximo, como se esperava. Tem-se então

$$\hat{\lambda}=\frac{T^*}{\sum_{i,j}T_{ij}^*(W_{ij}+V_j)} , \qquad (2)$$

como estimador de máxima verossimilhança para λ.

Analisando a expressão obtida para $\hat{\lambda}$ constata-se que

$$\hat{\lambda} = \frac{T^*}{\sum_{i,j} T_{ij}^* \left(W_{ij} + V_j\right)} \leq \frac{T^*}{\sum_{i,j} T_{ij}^*} = \frac{T^*}{T^*} = 1,$$

pois $W_{ij} + V_j \geq 1$.

Por outro lado, como a expressão obtida para $\hat{\lambda}$, é claramente não negativa, fica assegurada a condição indispensável para que $\hat{\lambda}$ possa representar uma probabilidade que é $0 \leq \hat{\lambda} \leq 1$.

4. UM NOVO PROCEDIMENTO DE CALIBRAÇÃO DO MODELO DE SCHNEIDER

Nesta seção são obtidas duas maneiras de se fazer a calibração do modelo de oportunidades intervenientes de Schneider. A primeira é mais direta, porém exige mais informações e nela se admite que a probabilidade λ se mantém constante ao longo do tempo, quando o modelo for usado para fins de previsão. A segunda maneira, não necessita a hipótese de que a probabilidade λ se mantenha constante ao longo do tempo, mas, por envolver um processo iterativo, a sua implementação não é tão simples como a anterior. Naturalmente, em ambos os métodos assume-se como conhecidos tanto o número de oportunidades V_j oferecidas em cada zona de tráfego j, como também as distâncias d(i,j) das zonas i às zonas j para toda a área de estudos. A partir desses dados obtém-se a matriz (W_{ij}) das oportunidades intervenientes.

Para calibrar o modelo de Schneider para uma certa área de estudos, através do primeiro procedimento supra referido, é necessário então que se disponha de uma matriz (T_{ij}^*) de viagens observadas num certo intervalo de tempo para a área em consideração. O procedimento se inicia estimando a probabilidade λ através da fórmula (2) obtida para $\hat{\lambda}$, ou seja,

$$\hat{\lambda} = \frac{T^*}{\sum_{i,j} T_{ij}^* \left(W_{ij} + V_j\right)}.$$

Admitindo então que esta probabilidade se mantém constante desde a observação dos dados até a data para a qual se deseja fazer a previsão de demanda, utiliza-se este valor estimado para λ, no cálculo das constantes k_i e dos números T_{ij}. Os valores das constantes k_i, são calculados através da fórmula

$$k_i = \left[\sum_{j=1}^{n} e^{-\lambda W_{ij}} \left(1 - e^{-\lambda V_j}\right)\right]^{-1} \qquad (3)$$

que é obtida a partir de (1) e da condição de consistência

$$\sum_j T_{ij} = O_i.$$

Obtidos os valores dos k_i, calcula-se então o número T_{ij} de viagens com origem na zona i e destino na zona j, para cada par (i, j) de zonas da área de estudos, através do modelo (1), ou seja :

$$T_{ij} = O_i \cdot k_i \cdot e^{-\lambda W_{ij}} \left(1 - e^{-\lambda V_j}\right).$$

Naturalmente os valores de O_i são estimados para cada zona de tráfego através dos métodos convencionais de geração de viagens.

O outro procedimento utiliza um processo iterativo que pode ser entendido através do fluxograma da figura 1, onde o número $\varepsilon > 0$ (tão pequeno quanto se queira) é o erro máximo admissível na estimativa de λ.

Neste processo iterativo, obtém-se os valores de λ e dos k_i, partindo unicamente do conhecimento do número previsto O_i das viagens originadas em cada zona de tráfego i, e dos V_j dispensando a necessidade de conhecer uma matriz (T_{ij}^*) de viagens observadas em algum intervalo de tempo. Como os valores dos O_i e dos V_j não são necessariamente constantes ao longo do tempo, fica claro que aqui se dispensa a suposição de que a probabilidade λ se mantenha constante ao longo do tempo, ou seja, entre a data de observação da matriz (T_{ij}^*) e aquela para a qual se deseja fazer a previsão, como se exigia no outro procedimento. O fluxograma da figura 1 mostra como este processo iterativo é levado a efeito. Nele, em cada iteração os números k_i, T_{ij}, $\hat{\lambda}_1$ e o novo valor para λ, são calculados respectivamente pelas fórmulas

$$(3),\ (1),\ \hat{\lambda}_1 = \frac{\sum_{i,j} T_{ij}}{\sum_{i,j} T_{ij}\left(W_{ij} + V_j\right)} \quad \text{e novo } \lambda = \frac{\lambda + \hat{\lambda}_1}{2}.$$

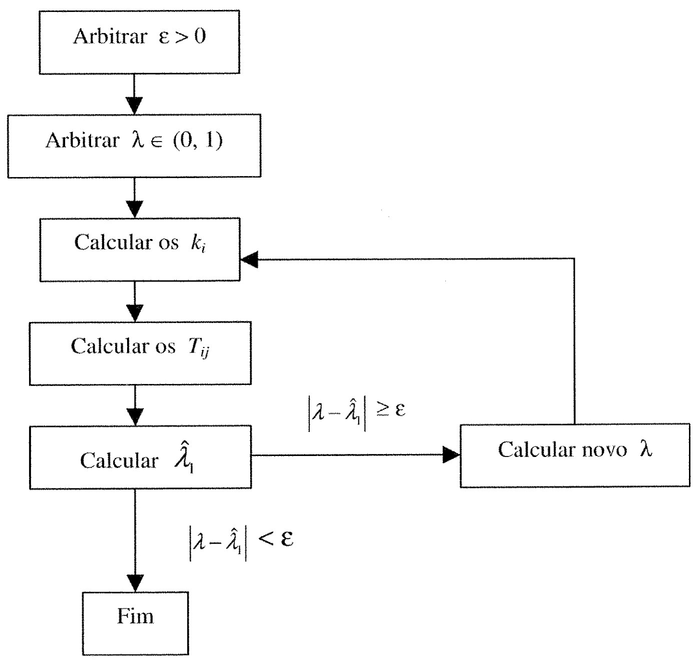

Figura 1 – Fluxograma de calibração do modelo de Schneider

A comprovação operacional da convergência do algoritmo de calibração foi plenamente alcançada e mostrou-se rápida nos casos testados. Além da aplicação em outras redes simuladas, o algoritmo também foi aplicado a uma área com trinta zonas de tráfego correspondentes a bairros da cidade de Florianópolis. Neste caso, com o valor inicial de λ igual a $\frac{1}{100}$ e para $\varepsilon = 10^{-6}$ a estabilização foi alcançada com apenas 20 iterações, isto é, a condição $|\lambda - \hat{\lambda}_1| < 0{,}000001$ passou a ser satisfeita a partir da vigésima iteração. A prova matemática da convergência do algoritmo de calibração desenvolvido não foi incluída neste trabalho e será objeto de um próximo artigo.

O valor inicial para λ pode ser qualquer número do intervalo aberto (0, 1). Porém, a convergência do processo iterativo pode ser acelerada tomando-se como valor inicial para λ o inverso do número $\frac{1}{2}\sum_j V_j$, isto é, $\lambda_0 = \frac{2}{\sum_j V_j}$ .Esta escolha é ditada pela intuição pois se as oportunidades estiverem uniformemente distribuídas na área de estudos, é razoável supor que o número médio de oportunidades analisadas por viagem seja aproximadamente $\frac{1}{2}\sum_j V_j$. A escolha aqui proposta para o valor inicial de λ aplicada ao caso da área de trinta zonas de tráfego supra mencionado, fez com que o processo atingisse a estabilidade a partir da nona iteração.

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentou-se um novo procedimento de calibração do modelo de oportunidades intervenientes de Schneider, centrado numa nova maneira de determinar o parâmetro λ. A determinação deste parâmetro foi alicerçada no método matemático-estatístico da máxima verossimilhança.

A aplicação do método da máxima verossimilhança revelou a existência de uma relação entre λ e o número médio de oportunidades por viagem. Isto permitiu uma interpretação mais consistente e realista do parâmetro λ como sendo a probabilidade de uma oportunidade ser aceita, se considerada. Esta interpretação, certamente servirá para dirimir eventuais dúvidas remanescentes entre pesquisadores e planejadores de transporte, relacionadas à determinação e documentação da probabilidade λ, utilizada para calibrar modelos de distribuição de viagens que se baseiam em oportunidades intervenientes.

A aplicação prática do novo procedimento de calibração revelou sua operacionalidade e mostrou experimentalmente, e com grande rapidez, sua convergência à relação, entre λ e o número médio de oportunidades por viagem analisadas pelo viajante, obtida na correspondente dedução matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ruiter, E. R. (1967) *Toward a better understanding of the intervening opportunities model.* Transportation Research, v.1, p. 47-56.

Schneider, M. (1959) *Gravity models and trip distribution theory.* Papers and Proceedings of the Regional Science Association, v. 5, p. 51-56.

Taylor et al. (1992) *Designing a large-scale travel demand survey: new challenges and new opportunities*, Transportation Research A, v. 26A, n. 3, p. 247-261.

Ulysséa Neto, I. e Gonçalves, M.B. (1993) *Modelos de oportunidades intervenientes e modelos gravitacionais de distribuição de viagens – Possibilidades de amalgamação.* Revista de Transporte e Tecnologia, Campina Grande, n. 10, p. 35-48.

CONTATOS

[1] **Nilo Kühlkamp**

Departamento de Matemática , Universidade Federal de Santa Catarina
Caixa postal 476 – CEP 88040-900 – Florianópolis, SC, Brasil

2 **Ismael Ulysséa Neto**

Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina
Caixa postal 476 – CEP 88040-900 – Florianópolis, SC, Brasil
E-mail: ecv1iun@ecv.ufsc.br